

**Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie**

**Spécialité : Mécanique et Acoustique**

présentée par

**Adrien Mamou-Mani**

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet :

**Précontraintes et vibration des tables d'harmonie**

*Vers une modélisation du savoir-faire des fabricants d'instruments de musique*

soutenue le 12 décembre 2007 devant le jury composé de :

M. Jean-Jacques MARIGO  
M. Antoine CHAIGNE  
M. Andrei CONSTANTINESCU  
M. José ANTUNES  
M. Stephen PAULELLO  
M. Charles BESNAINOU  
M. Joël FRELAT

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Invité  
Directeur de thèse  
Directeur de thèse



---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>3</b>
<b>1 Avant-propos</b>	<b>9</b>
<b>2 Introduction</b>	<b>11</b>
2.1 Présentation . . . . .	11
2.2 Plan du manuscrit . . . . .	11
<b>3 Les précontraintes dans la fabrication des instruments à table d’harmonie</b>	<b>13</b>
3.1 Introduction . . . . .	13
3.2 Définir « précontrainte » . . . . .	13
3.3 Les sources de précontraintes dans les tables d’harmonie . . . . .	14
3.3.1 L’assemblage corps-cordes : <i>la charge</i> . . . . .	14
3.3.2 L’assemblage barres-plaque : <i>Le bombé initial</i> . . . . .	18
3.4 Chargement des cordes + bombé initial : relation entre les deux sources de précontraintes . . . . .	20
3.5 Conclusion . . . . .	21
<b>I Vibrations linéaires de systèmes précontraints</b>	<b>23</b>
<b>4 Théorie des précontraintes</b>	<b>25</b>
4.1 Vibrations linéaires des structures élastiques précontraintes . . . . .	25
4.1.1 Evaluation des précontraintes . . . . .	28
4.2 Analyse de stabilité . . . . .	28
4.2.1 Point limite . . . . .	28
4.2.2 Point de bifurcation . . . . .	29
4.2.3 Critères d’instabilité . . . . .	29
4.3 Discrétisation spatiale par la méthode de Rayleigh-Ritz . . . . .	29
4.4 Calcul des modes de vibration dans le cas précontraint . . . . .	31
4.4.1 Cas de faibles pré-déformations . . . . .	31
4.4.2 Cas de pré-déformations importantes . . . . .	31
4.5 Résumé . . . . .	32
<b>5 Calcul numérique sur une table d’harmonie de piano précontrainte</b>	<b>33</b>
5.1 Synthèse de travaux antérieurs . . . . .	33
5.1.1 Analyses modales . . . . .	33

---

---

5.1.2	Mesures de mobilité . . . . .	34
5.1.3	Modèles de tables de piano . . . . .	35
5.1.4	La question du rayonnement . . . . .	35
5.1.5	Et la qualité sonore? . . . . .	36
5.2	Un modèle numérique de table de piano . . . . .	36
5.2.1	Caractéristiques du modèle . . . . .	37
5.2.2	Stabilisation du maillage . . . . .	37
5.2.3	Modes de vibration de la table plate et effets des conditions aux limites	38
5.2.4	Modélisation du bombé initial . . . . .	40
5.3	Modélisation de la charge des cordes . . . . .	41
5.3.1	Précontraintes linéaires ou non-linéaires? . . . . .	41
5.3.2	Effets de la charge transversale sur les modes propres de vibration .	44
5.3.3	Calcul de mobilité . . . . .	46
5.3.4	Effets statiques : un intérêt pour la conservation-restauration . . . .	49
5.3.5	Forme de la table en état de jeu . . . . .	49
5.4	Conclusion : Existe-t-il un réglage optimal? . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Vibrations linéaires de systèmes précontraints</b>	<b>51</b>
6.1	Éléments fondamentaux pour l'étude . . . . .	51
6.1.1	Théorie des vibrations . . . . .	51
6.1.2	Mécanique non-linéaire . . . . .	52
6.1.3	Cas classiques de systèmes précontraints . . . . .	52
6.2	Systèmes précontraints avec changements géométriques importants . . . .	54
6.2.1	Le portique à un degré de liberté . . . . .	54
6.2.2	La poutre flambée chargée transversalement . . . . .	58
6.2.3	Effets de la charge transversale sur deux modes . . . . .	62
6.3	Conclusions du chapitre . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Validation expérimentale sur un monocorde précontraint</b>	<b>67</b>
7.1	Expérience . . . . .	67
7.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	67
7.1.2	Méthode d'holographie acoustique en champ proche . . . . .	69
7.1.3	Effets de la charge dans le plan . . . . .	69
7.1.4	Effets de la charge transversale . . . . .	70
7.2	Modélisation . . . . .	73
7.2.1	Etablissement du modèle . . . . .	73
7.2.2	Simulation des effets de la charge dans le plan . . . . .	74
7.2.3	Simulation des effets de la charge transversale . . . . .	75
7.3	Conclusion . . . . .	77
<b>II</b>	<b>Vibrations non-linéaires de systèmes précontraints</b>	<b>79</b>
<b>8</b>	<b>Vibrations non-linéaires de systèmes simples précontraints</b>	<b>83</b>
8.1	Introduction . . . . .	83
8.2	Vibrations non-linéaires . . . . .	83
8.2.1	Descripteurs des vibrations non-linéaires . . . . .	84
8.3	L'exemple du portique à un degré de liberté . . . . .	86
8.3.1	Analyse qualitative . . . . .	87

---

---

8.3.2	Analyse quantitative . . . . .	89
8.3.3	Apports des effets des précontraintes par rapport aux seuls effets géométriques . . . . .	92
8.4	La poutre flambée réduite à deux degrés de liberté . . . . .	93
8.4.1	Cas où $q_{2ini} = 0$ . . . . .	95
8.4.2	Cas où $q_{2ini} \neq 0$ . . . . .	96
8.4.3	Etats stationnaires par les modes normaux non-linéaires (NNMs) . . . . .	97
8.5	Conclusion . . . . .	99
<b>9</b>	<b>Expérience sur une table d'harmonie vibrant à grande amplitude</b>	<b>101</b>
9.1	Montage expérimental . . . . .	101
9.2	Décroissance temporelle . . . . .	101
9.3	Propriétés spectrales . . . . .	103
9.4	Effets de l'amplitude d'excitation . . . . .	103
9.5	Conclusion . . . . .	104
<b>10</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>107</b>
10.1	Conclusion . . . . .	107
10.2	Perspectives . . . . .	107
<b>11</b>	<b>Annexe 1</b>	<b>109</b>
11.1	Modes de la plaque plate comparés à un calcul numérique . . . . .	109
11.1.1	Modes observés numériquement et expérimentalement . . . . .	109
11.1.2	Modes n'étant pas observés expérimentalement . . . . .	110
<b>12</b>	<b>Annexe 2</b>	<b>115</b>
12.1	Evolution des fréquences de vibration de la plaque flambée sous chargement transversal : cas où $b = 2.31$ . . . . .	115
	<b>Liste des figures</b>	<b>117</b>
	<b>Liste des tables</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>124</b>
	<b>Index</b>	<b>131</b>

---



# Remerciements

Les trois années durant lesquelles j'ai effectué ce travail de thèse ont été riches en événements et en rencontres. Toutes les personnes qui suivent ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'écriture de ce manuscrit et je les en remercie chaleureusement.

Charles Besnainou et Joël Frelat : après toutes ces années, je leur dois à peu près tout ce que je sais. Depuis mon travail de maîtrise, ils ont toujours fait preuve d'une grande générosité à mon égard. On dit souvent qu'un double encadrement est difficile à vivre pour le thésard, qui se voit ainsi tiraillé dans son travail quotidien... cela a plutôt été dans mon cas un très grand plaisir de travailler avec eux et la possibilité d'en apprendre deux fois plus. Mais cela n'est rien comparé à l'aventure humaine que nous avons vécue ensemble et à une amitié qui je l'espère sera longue !

Antoine Chaigne et Andrei Constantinescu : ils ont mené le travail de rapporteurs et d'examineurs avec un regard indépendant, critique et bienveillant. J'ai beaucoup apprécié l'implication dont ils ont fait preuve et les discussions scientifiques que les rapports ont contribué à faire naître. J'espère que ces échanges continueront.

José Antunes, Jean-Jacques Marigo et Stephen Paulello : leur présence dans mon jury a été un honneur. Ils ont décortiqué le manuscrit avec autant de sérieux que les rapporteurs, ce qui a rendu la soutenance vivante et pleine de questions et autres débats très intéressants.

Sylvie Le Moyne, François Ollivier et Dominique Boulet, Gérard Hamel, Marc François, Eric Marandas : je n'aurais eu ni l'idée ni la possibilité d'effectuer des expériences sans leur aide. Certains de nos dispositifs sont dans le manuscrit et d'autres pas, mais ils ont tous contribué à faire murir mes recherches.

Denis Parenthoïne, Antoine Liutkus, Paul Isambert, Raphaël Bresson, Fabien Conti et les autres stagiaires que j'ai encadrés : j'ai beaucoup apprécié notre travail, qui se retrouve plus ou moins explicitement dans ce manuscrit. Avec toutes leurs questions souvent au-delà de mes compétences, l'encadrement a été dans les deux sens !

Marc Ducornet, Daniel Friederich, Emile Jobin et tous les professionnels de la musique que j'ai rencontrés : on dit que les fabricants d'instruments de musique gardent précieusement leurs secrets. J'ai eu la chance d'avoir connu des fabricants de renom qui n'ont pas hésité à me faire partager leur connaissance très pointue de leur art.

Michèle Castellengo, Danièle Dubois, Pascale Cheminée, Corrado Maurini, Sébastien Neukirch, Basile Audoly, Joël Pouget, Stéphane Vaiedelich et Thierry Maniguet : avoir des discussions tous horizons avec ces chercheurs de très grande qualité a été une aide précieuse pour consolider et partager mes connaissances.

Toute l'équipe de l'Institut Jean Le Rond d'Alembert, aussi bien à Jussieu, qu'à la rue de Lourmel et Saint Cyr. J'ai du mal à les quitter, c'est tout dire... en particulier Olivier Devauchelle et tous les thésards, Valentina Belloncle et Martine Rousseau. Enfin Hugues Genevois et Gérard Maugin m'ont apporté l'aide précieuse et les coups de pouce qui ont

---

permis à mon travail de recherche de se dérouler dans les meilleures conditions.

Ma famille et mes amis : ils m'ont toujours soutenu, même dans les moments où je n'étais pas très facile à vivre. Merci à mes frères Gabriel et Axel, mes grands parents Mamie Tune, Grand-Père, Nana et la pensée de Roro, mes oncles, mes tantes, mes cousins, Laurent, Monel et tous les copains : s'ils n'avaient pas été tous là, je n'aurais certainement pas été au bout de l'aventure. Enfin, merci à Manu pour ses grandes qualités d'écoute et sa relecture minutieuse du manuscrit.

Maman, Papa et Judith-Laure : un remerciement tout spécial leur revient, pour tout.

---

# Chapitre 1

## Avant-propos

*“La technologie doit d’abord être vécue, pensée ensuite si le besoin s’en fait sentir”*  
André Leroi-Gourhan, *Milieu et Technique*

Les travaux qui suivent portent sur la modélisation de procédés de fabrication d’instruments de musique. Ils s’inscrivent ainsi dans la famille des sciences traitant de la technique, tekhnê chez les grecs, art jusqu’au XIX<sup>e</sup> siècle. A l’heure actuelle, cette famille scientifique est immense... Elle fait le grand écart entre l’archéologie, l’anthropologie, la sociologie, l’histoire des techniques, la technologie, les sciences cognitives et les sciences physiques. Toutes ces disciplines s’appuient en général sur les objets produits par les Hommes pour répondre à leurs questions propres (ces objets peuvent être des témoins essentiels de civilisations anciennes pour l’archéologue ou encore des structures souvent délicates à modéliser pour le mécanicien théorique), mais aussi pour répondre à des questions spécifiques aux techniques que l’on résumera de la manière suivante : quelle est la part de rationalité et de déterminisme dans les objets que nous fabriquons ? Vaste question !

Face à de telles questions, les théories se croisent, les modèles s’entrechoquent et les avis divergent. Il serait bien présomptueux à quiconque de prédire la place du Web dans le futur ou encore l’avenir d’un instrument tel que la guitare à partir de son seul domaine de compétences. La pluri-disciplinarité semble être ainsi le maître mot pour l’étude des objets techniques.

Ce manuscrit se concentrera sur des techniques de fabrication, des savoir-faire. Le savoir-faire « consiste dans un ensemble de connaissances et de pratiques qui permettent d’atteindre un résultat escompté, qui sont accumulées par un individu ou un groupe et qui sont susceptibles d’être transmises. On y reconnaît la maîtrise de procédures donnant naissance à des pratiques codifiées, des techniques. » [34]. On peut noter que la définition précédente sous-entend que le savoir-faire est un ensemble rationnel, que sa visée est pré-définie, préconçue. Le problème de l’invention et de son émergence est ainsi évacué. Parler de savoir-faire réduit les procédés de fabrication à leurs seuls processus rationnels.

On peut légitimement appliquer ces définitions à la fabrication des instruments de musique. Par exemple, E. Leipp [47] explique que le développement historique des instruments de musique a abouti aujourd’hui à « une espèce d’optimum fonctionnel ». Le « résultat escompté » est ainsi une fonctionnalité spécifique aux instruments de musique, qu’il nous faudra définir par la suite. On peut d’ores et déjà affirmer que la fonction d’un instrument est principalement sonore et mécanique.

Avant de passer aux résultats de nos recherches, nous nous devons aussi de signaler

---

que les questions sur la technique sont, depuis les « quatre causes » aristotéliennes [2], un domaine privilégié de la philosophie jusqu'à présent ; on pourrait citer entre autres Heidegger [37] ou plus récemment Stiegler [84].

---

## Chapitre 2

# Introduction

### 2.1 Présentation

Qu'est-ce qu'un *bon* instrument de musique ? Posée par M. Mersenne dès 1636 [58], cette question exprime l'une des motivations principales de l'acoustique musicale. La mécanique et l'acoustique possèdent le bagage conceptuel et les techniques de mesure permettant d'analyser et de synthétiser fidèlement des sons d'instruments de musique. Ces sciences sont donc à même, en théorie, de différencier les signaux issus d'un stradivarius et d'un instrument moins bon. Pourtant, la question reste toujours d'actualité, et les bons instruments sont toujours faits pour une large part « non scientifiquement ».

Nous nous proposons ici de changer de point de vue. Nous dirons qu'un *bon* instrument n'est rien d'autre qu'un instrument *bien fait*. La question de la *qualité* est alors transformée en question des *savoir-faire* de fabrication. Cette reformulation se traduit par une nouvelle complexité, non moins grande. La facture instrumentale contient en effet une multitude de choix de matériaux, de collages, de réglages, de finitions. La réalisation de ces étapes suppose autant de techniques très bien maîtrisées par les bons fabricants et techniciens.

Face à une telle complexité, les modèles mécaniques semblent être d'un piètre secours. Une réaction en chaîne va de tel choix de matériau à tel réglage, etc. Trouver les bons modèles, prenant en compte tous ces couplages, est une tâche périlleuse. La réduction du problème doit donc être motivée par les connaissances et l'expérience des bons fabricants. C'est seulement après cette étape préliminaire que la modélisation aura un sens.

C'est de cette manière qu'a débuté *l'Atelier Piano* à l'Université Pierre et Marie Curie. Proposant des séminaires mensuels autour du piano pendant cinq ans, ces réunions ont été autant de rencontres et d'échanges entre chercheurs en mécanique et en sciences humaines, et des fabricants et techniciens du piano. Un des apports principaux de ces rencontres a été de faire émerger l'étape de « la mise en charge » des tables d'harmonie comme une essentielle dans la facture du piano, et de lui associer le principe mécanique de « précontrainte ». Le travail de modélisation pouvait alors commencer.

### 2.2 Plan du manuscrit

A partir du discours de fabricants d'instruments à table d'harmonie, le chapitre 3 montre l'importance et la complémentarité de deux étapes de la fabrication des instruments à tables d'harmonie, qu'on appellera ensuite « charge » et « bombé » de la table.

Une fois ces deux techniques choisies, nous nous focalisons sur le piano. le travail

---

consiste à modéliser leurs effets sur les propriétés vibratoires de la table d'harmonie. Les vibrations ont en effet une place privilégiée dans la modélisation des instruments de musique, puisqu'elles sont la première étape dans la production du son.

Le premier modèle, au chapitre 5, est un modèle numérique d'une table d'harmonie de piano proche d'une table réelle, donnant les modes de vibration de la table. Le calcul par éléments-finis permet d'introduire une géométrie réaliste, les barres d'harmonie et les chevalets de la table. L'originalité de notre travail est que le modèle prend aussi en compte les effets de la charge et du bombé, à l'aide d'un modèle de *précontraintes*. Le chapitre suivant est consacré à des oscillateurs simples précontraints. Ils montrent que les effets de la charge sur les modes de vibrations de la table se retrouvent qualitativement à partir d'oscillateurs subissant statiquement des grands déplacements. Ces effets sont retrouvés sur l'expérience du chapitre 7. Ces résultats sont regroupés dans une première partie portant sur les modes propres de vibration, partie nommée vibrations linéaires des tables d'harmonie.

La deuxième partie porte sur les vibrations non-linéaires. Réutilisant des oscillateurs simples précontraints, nous montrons comment des vibrations à grands déplacements peuvent advenir pour certains réglages « extrêmes » (chapitre 8). Ces conditions sont réalisées au chapitre 9 sur un prototype d'instrument à table d'harmonie sous précontraintes fortes. On obtient alors une caricature des effets combinés de la charge et du bombé sur le son rayonné par des tables d'harmonie.

Le lecteur aura compris que la question de la qualité des instruments de musique ne sera pas résolue ici. Nous espérons qu'il apprendra tout de même que certains modèles sont « mieux réglés » que d'autres.

---

## Chapitre 3

# Les précontraintes dans la fabrication des instruments à table d'harmonie

### 3.1 Introduction

L'objectif de ce manuscrit est de modéliser certains procédés de fabrication des instruments de musique incluant le concept mécanique de *précontrainte*. Ce chapitre est consacré à la mise en correspondance de cette notion, bien connue des ingénieurs, avec certaines étapes dans la fabrication des grandes familles d'instruments à table d'harmonie.

### 3.2 Définir « précontrainte »

Le terme « précontrainte » est employé en Mécanique Théorique ainsi qu'en Génie Civil. En voici une définition théorique générale : « Une structure est dite précontrainte lorsqu'elle est soumise à un champ de contraintes initial [...] et un champ de déformations initial [...] donnés et indépendants du temps » d'après M. Géradin et D. Rixen [36]. Une structure précontrainte apparaît donc comme le produit d'une *action*, d'un chargement sur la structure impliquant un *état statique initial* différent de son état d'équilibre stable lorsqu'elle n'est soumise à aucun chargement extérieur. Mais cette définition générale diffère sensiblement de la définition en Génie Civil, introduite par Eugène Freyssinet, inventeur du principe des bétons précontraints : « Ce sont des forces qui, appliquées à une structure avant celles qui tendraient à la détruire, assurent sa permanence » [27]. Cette définition met en effet l'accent sur une séparation entre deux modes de chargement distincts. Le premier, correspondant aux forces « qui tendraient à [...] détruire » la structure, apparaît comme nécessaire, comme une obligation de la fabrication. Le deuxième chargement, celui des forces qui « assurent [la] permanence » de la structure, est une solution technique, une *invention* du fabricant pour répondre aux dangers du premier chargement nécessaire.

Les différences entre ces définitions révèlent les difficultés et les risques d'incompréhensions d'une recherche scientifique portant sur des procédés de fabrication. En effet, l'approche théorique ne fait pas de distinction entre le chargement « nécessaire » et la « solution technique », les deux étant sources de contraintes initiales dans la structure en état de fonctionnement. Elle perd ainsi les caractères : déterminé, dans un cas, et intentionnel, dans l'autre, de l'action du fabricant. Mais ces remarques sont-elles applicables à

---

la fabrication des instruments de musique ? Et si oui, suivant quels critères ?

A partir de considérations historiques et du discours de facteurs d'instruments, ce chapitre montrera que la définition de la mécanique théorique des précontraintes s'applique parfaitement à deux étapes du processus de fabrication des instruments à table d'harmonie d'une part, et d'autre part, que le concept des précontraintes du Génie Civil se révèle efficace pour séparer ces deux étapes.

### 3.3 Les sources de précontraintes dans les tables d'harmonie

Deux étapes dans la fabrication des instruments à tables d'harmonie introduisent des précontraintes dans la table : l'assemblage entre la table et les cordes et le collage des barres d'harmonie sous la table. Nous avons choisi de les présenter par la suite dans cet ordre, car c'est l'ordre avec lequel ils sont apparus dans l'Histoire.

#### 3.3.1 L'assemblage corps-cordes : *la charge*

Pour tous les instruments à corde possédant une caisse de résonance, l'assemblage des cordes avec la caisse implique nécessairement des contraintes initiales dans le corps de l'instrument. Il existe généralement trois points de contact depuis lesquels le chargement peut se faire : les deux extrémités de la corde et le point de contact entre la corde et le chevalet. Selon la famille instrumentale, chacun de ces lieux de chargement peut induire plus ou moins de contraintes initiales. On peut ainsi distinguer :

- la famille des violons, pour laquelle une force transversale importante et un léger moment s'exercent au chevalet. De plus, les extrémités des cordes tirent sur le manche d'un côté et sur la caisse de l'autre côté.
- la famille des luths et des guitares, pour laquelle une des extrémités de la corde est confondue avec le point de fixation au chevalet. Cette extrémité impose une force au chevalet quasi parallèle à la table.
- la harpe où une des extrémités est confondue avec le point de fixation au chevalet (comme pour le luth) mais l'effort est principalement transversal à la table.
- le piano moderne. Dans ce cas, les deux extrémités de la corde sont découplées du corps et seul le point de contact au chevalet transmet un effort principalement transversal.
- le clavecin, cas plus complexe, où les cordes sont accrochées à la caisse et où le mode d'accroche des cordes au chevalet diffère selon les cas. Nous présenterons ces différents cas dans la suite.

Cette classification n'est pas exhaustive et nécessiterait d'être complétée par une étude organologique poussée. Mais elle a le mérite de proposer des classes fondées sur le savoir-faire de fabrication. Il reste à décrire comment cet assemblage est réglé et analysé par les fabricants. Les descriptions suivantes ne sont pas à considérer comme des « vérités », mais plutôt comme une compilation de discours de professionnels qui révèlent l'importance qu'a cette technique à leurs yeux.

##### 3.3.1.1 La charge des cordes de la guitare

Le mode d'accroche des cordes sur le chevalet de guitare favorise principalement une torsion mais implique aussi une force transversale à la table : « La table, par l'intermédiaire du chevalet classique où sont attachées les cordes (40 à 47 kg de tension) subit une torsion

---

importante et une légère pression » d'après D. Friederich[28]. La force transversale est donnée par la différence de hauteur entre le sillet et le cordier du chevalet. D'après R. Courtnall [17], il faut de plus incliner légèrement vers l'arrière la face supérieure du sillet pour donner un changement net d'angle lorsque les cordes quittent l'avant du sillet. Le réglage de cette force transversale est important pour la qualité sonore de l'instrument, en particulier pour la « clarté du son » .

### 3.3.1.2 La charge des cordes du violon

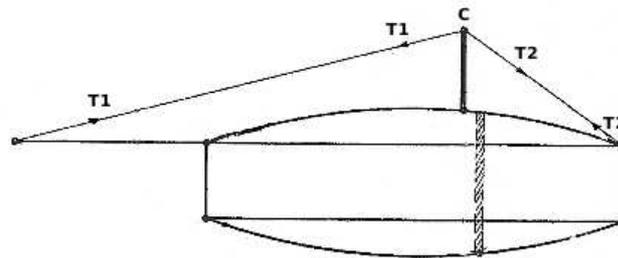


FIG. 3.1 – Efforts exercés par les cordes du violon. La tension d'une corde se traduit par les efforts  $T_1$  et  $T_2$  sur le chevalet et sur la caisse

Le chargement sur la table induit par les cordes sur le chevalet du violon est important. La quasi symétrie de l'angle des cordes au chevalet implique que l'effort transmis est principalement vertical (perpendiculaire à la table) (voir figure 3.1). Certains facteurs affirment qu'il existe une différence de quelques degrés entre l'angle au chevalet du violon baroque et du violon moderne (de plusieurs degrés, variant de  $160^\circ$  à  $155^\circ$ ), la charge la plus importante étant celle des violons modernes [1]. Pour Altenburger [1], plus cet effort des cordes sur le chevalet est important, plus l'instrument sonnera puissant. Mais E. Leipp [47] considère que les deux extrémités des cordes sont les lieux d'efforts non négligeables sur le corps de l'instrument.

### 3.3.1.3 La charge des cordes du piano

Le piano a été soumis à une évolution technologique originale. Les extrémités des cordes sont attachées à un cadre en fonte découplé du reste du corps de l'instrument. C'est ainsi simplement au chevalet que les cordes chargent la table d'harmonie. C'est par la hauteur du cadre que se règle généralement ce contact. Les facteurs de piano évoquent un réglage mécanique optimal de la charge des cordes au chevalet (voir figure 3.2). Pour permettre que le contact entre les cordes et la table soit « très intime[...]», cette pression est considérable, elle atteint  $2,3\text{kg/cm}$  pour les cordes moyennes. » d'après K. Wolters [100]. Pour Reblitz [73], le réglage de la charge a de plus des conséquences acoustiques très importantes : une charge insuffisante provoque un son long et faible, une charge excessive un son plus fort et plus court.



FIG. 3.2 – Exemple de réglage de la charge du piano à l'aide d'une plate-forme, d'après [77]

#### 3.3.1.4 La charge des cordes du clavecin

Le chargement des cordes du clavecin est plus complexe. E. Jobin [41] dit que la charge des cordes est différente pour les clavecins flamands d'une part et italiens d'autre part. En effet, l'angle latéral important formé aux contre-pointes des clavecins flamands ( $6^\circ$  à  $8^\circ$  dans le grave et  $15^\circ$  à  $17^\circ$  dans l'aigu) implique un bon contact et permet de réduire la charge des cordes 3.3. L'angle latéral est aussi source d'une torsion de la table (voir figure 3.3), autre forme de précontrainte, torsion dont les conséquences acoustiques ont été étudiées par A. Caracciolo [11]. On retrouve ces propriétés dans les cordes graves chez le facteur Tibaut de Toulouse « Un cordier de pointe surélevé suspend pratiquement les cordes des graves des 8 pieds dont la solidarité avec le chevalet est maintenue grâce à des contre-pointes. » Ceci a des effets sur la qualité sonore : « La table en cet endroit, en l'absence de contraintes, fonctionne en favorisant une émission souple du son, comme entourée d'un halo, un peu comme un archiluth » [40] Concernant le reste de la tessiture sur l'instrument de Tibaut « le cordier est bas et égal dans l'éclisse courbe, ce qui implique par conséquent un angle des cordes pratiquement constant. La pression importante de la table qui en résulte confère une grande présence au son et participe à l'élaboration de consonnes dans le timbre. Un autre angle des cordes, latéral celui-là, derrière les chevalets, très important dans l'aigu ( $17^\circ$ ) et qui diminue en éventail vers le grave, favorise un effet de rebond du son, ce qui le rend très vivant, un peu comme un bon vent dans les orgues » [40]. Pour sa part, le facteur Marc Ducornet [19] considère que les instruments avec un angle des cordes au chevalet impliquant une charge importante ont un son avec une attaque forte et peu de longueur de son, et inversement pour les instruments avec peu de charge au chevalet.

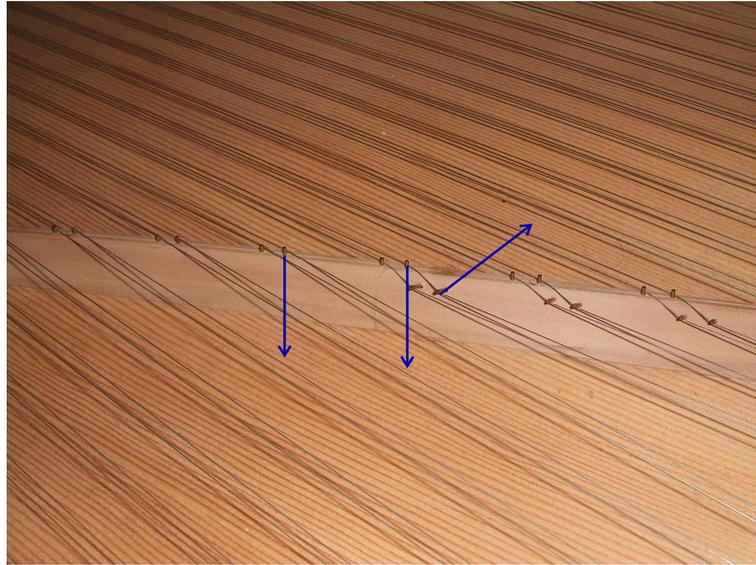


FIG. 3.3 – Efforts exercés par les cordes du clavecin au chevalet. Pour une agraffe simple, le chargement est principalement vertical. Pour une agraffe avec contre-pointe, la différence de direction des efforts implique un moment.

### 3.3.1.5 En résumé

Pour tous les instruments cités, les cordes exercent des efforts statiques importants sur la caisse, et donc des précontraintes. Pour les trois points de contacts entre les cordes et la caisse, c'est sans doute le contact au chevalet qui est le plus déterminant pour les facteurs. C'est ainsi la table d'harmonie qui va subir la majorité des contraintes initiales provenant des cordes à travers le chevalet. Deux familles émergent : celle de la guitare, pour laquelle l'effort des cordes induit principalement une torsion de la table et celle contenant le piano et le violon, pour lesquelles les cordes imposent une charge transversale tendant à faire fléchir la table. Le clavecin est un cas hybride particulièrement intéressant. Même s'il est morphologiquement proche du piano, l'utilisation de contre-pointes au chevalet (dans certaines écoles de facture) annule la charge verticale (mais induit un effort de torsion, comme sur la guitare).

On peut ajouter que les facteurs considèrent que le réglage de la charge des cordes conditionne fortement la qualité sonore. Quelque soit l'instrument, ils s'entendent pour dire que la puissance sonore est augmentée avec la charge. Dans le cas des instruments à vibrations libres des cordes (guitare, piano, clavecin), cette augmentation du niveau à l'attaque se traduit par une diminution de la durée du son.

Enfin, cette charge des cordes apparaît, du point de vue mécanique, comme une solution efficace pour résoudre le problème fondamental de la qualité du contact entre les cordes et la table au chevalet. C'est grâce à elle que la corde et le chevalet restent solidaires pendant la vibration. Les agrafes des chevalets du piano et les contre-pointes du clavecin sont ainsi des exemples de solutions complémentaires. On peut citer aussi les travaux de Stephen Paulello, qui a développé un système d'agrafes originales sur les chevalets de ses pianos. Ce système lui permet aujourd'hui de garder un bon contact entre les cordes et les chevalets sans utiliser nécessairement une charge statique des cordes.

### 3.3.2 L'assemblage barres-plaque : *Le bombé initial*

La table d'harmonie est préalablement formée à partir du collage des barres d'harmonie sous la plaque de bois, pour tous les instruments cités. Cette étape a pour effet principal de rigidifier la table sans lui ajouter trop de masse. Nous allons voir que les fabricants profitent souvent de ce collage pour donner à la table un bombé initial, en introduisant des précontraintes.

#### 3.3.2.1 Le collage des barres de la guitare

Même si, à première vue, la table d'harmonie d'une guitare actuelle semble plate, il n'en est rien : sa fabrication est beaucoup plus subtile. Jusqu'à vers 1800, les tables des guitares sont effectivement planes selon D. Friederich [28]. Mais, par la suite, A. de Torres utilisait un « solera » (plate-forme de travail creusée) qui permettait d'avoir une table bombée. Cette technique s'est ensuite généralisée. La procédure pour mettre ce bombé d'après la technique de construction dite espagnole peut se résumer ainsi : « A l'emplacement du grand lobe, la plate forme est légèrement creusée, ainsi la table étant mise face extérieure vers le bas, elle sera pressée dans cette forme concave. [...] les barres en éventail qui sont droites et plates sur la face de collage, sont forcées sous la pression des serre-joints pour prendre la forme galbée de la plate-forme. », d'après R. Courtnall [17]. La profondeur maximale du creux est de 2mm, du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la table. Les conséquences de ce bombé sont que « La structure résultante est beaucoup plus rigide que si les barres étaient collées sur une table plate. » [17] « c'est une sécurité intéressante pour éviter les fentes de retrait en climat sec et très sec. » « la voûte sera beaucoup plus stable et ne s'affaissera que très peu en cas de fortes sécheresse, en abaissant de façon modérée le chevalet et les cordes, ce qui ne dérèglera pas trop l'instrument. » D. Friederich [28]

#### 3.3.2.2 Le collage de la barre du violon

De nombreux facteurs de violons taillent la barre avec une courbure plus forte que celle de la table. Le collage de la barre induit alors un « forçement » ([1] et figure 3.4) , c'est-à-dire qu'il donne une tension à la table. Toutefois, d'autres auteurs comme Johnson [42] préconisent de ne pas mettre de courbure différente à la barre, ou avec pas plus de 0,5 mm d'écart entre les bords de la barre et la table avant collage.

#### 3.3.2.3 Le collage des barres du piano

Le collage des barres du piano se fait généralement grâce à l'utilisation d'un plateau creux (voir une explication précise par K. Fenner [23]). Le procédé est donc semblable à celui de la guitare. « Cette forme galbée contribue à maintenir une certaine pression dans la table, accroît sa capacité vibratoire et l'empêche de s'affaisser sous la pression des cordes. » [73]. Un autre exemple de K. Wolters [100] montre que ces propriétés sont largement admises chez les fabricants de piano : « Ces barres jouent encore un rôle important : avant d'être collées, elles ne sont pas tout à fait droites, mais cintrées, et donnent ainsi à la table d'harmonie cette tension qui la rend capable de vibrer. » (sic)

---



FIG. 3.4 – Exemple de forçage de la barre du violon, d'après [38]

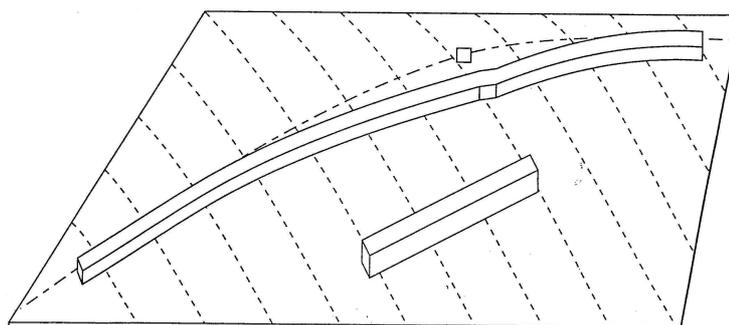


FIG. 3.5 – Exemple de bombé initial du piano droit. Les pointillés représentent la forme des barres. Le □ représente le point le plus haut. (d'après [23])

### 3.3.2.4 Le galbe du clavecin ?

E. Jobin [41] explique que la table d'harmonie du clavecin est aussi bombée. Ce bombé s'obtient en réalisant la table dans un environnement très sec (35% d'hygrométrie contre 56% ambiant) sur laquelle on colle le barrage de table. Au passage à un taux d'hygrométrie normal, la table grandit et prend un bombé. On ne trouve toutefois pas référence à ce bombé de table dans l'ouvrage de Hubbard [39], ni chez Marc Ducornet [19]. E. Jobin a toutefois remarqué cette propriété sur un instrument historique de Tibaut de Toulouse : « Le barrage si particulier de Tibaut, en arête de poisson, façonne un gable sur la table exceptionnellement régulier et résistant. » « Cette invention remarquable de Tibaut, outre une résistance mécanique et une stabilité de la table accrues, contribue à promouvoir une réaction de la caisse qui favorise un « son de poitrine » propre à accentuer la prononciation de voyelles sonores. » (sic)

### 3.3.2.5 En résumé

Le chargement des cordes n'est donc pas la seule source de précontraintes dans les tables d'harmonie. On constate que pour les différentes familles considérées, une deuxième source de précontraintes provient du procédé donnant un bombé de la table, même dans le cas du violon, dont la table possède déjà une courbure initiale. Le procédé pour atteindre ce bombé est l'utilisation de barres de table cintrées. Seul le clavecin suit un autre procédé, jouant exclusivement sur le taux d'hygrométrie. Le bombé a principalement un rôle mécanique stabilisant, rigidifiant. Les facteurs lui attribuent aussi un intérêt acoustique, accroissant les capacités vibratoires de la table.

Il faut toutefois noter que « donner du bombé » n'est pas un procédé universel. La facture du clavecin n'en fait pas une règle, les guitares produites avant 1800 n'en avaient pas. Une proposition pour comprendre ce phénomène sera faite au paragraphe suivant.

## 3.4 Chargement des cordes + bombé initial : relation entre les deux sources de précontraintes

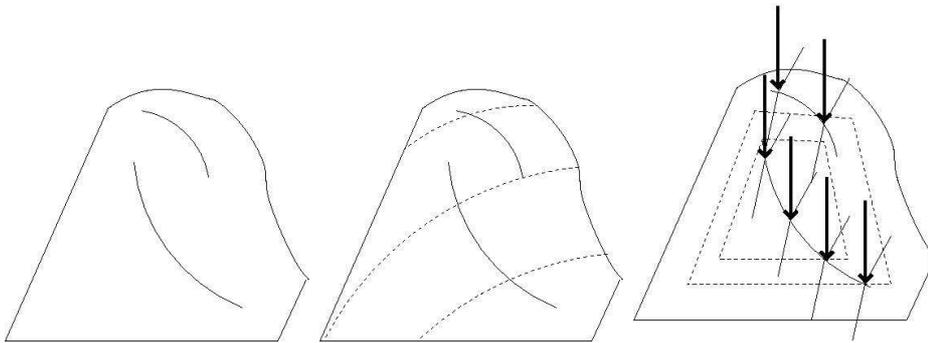


FIG. 3.6 – Schémas simplifiés de la mise en « bombé » et en « charge » de la table d'harmonie du piano

Les deux sources de précontraintes ont été présentées comme deux étapes de la fabrication des instruments à table d'harmonie ( l'exemple du piano est schématisé figure 3.6). Bien que présentées séparément, elles sont étroitement associées, participant au *savoir-faire* du fabricant. Pour Reblitz [73] « Dans une certaine mesure, plus la table [du piano] est galbée, plus forte doit être la charge exercée par les cordes ». Pour E. Jobin [41], mettre des contraintes permet à la table de ne pas s'effondrer sous l'action des cordes. Pour D. Friederich, « plus l'épaisseur est fine, plus ça se déforme. Donc on assemble la table et les barres cintrées dans un moule creux. »

Pour résumer, la charge des cordes est vécue comme une nécessité de la fabrication, assurant le contact et la transmission des vibrations des cordes à la table. Mais ces efforts tendent à donner des déformations à la table, comme par exemple son affaissement, ou une forme « en vague » très marquée (guitare, clavecin). Donner du bombé à la table est une *solution technique* qui permet de limiter ces déformations.

On voit ainsi poindre une première hypothèse mécanique quant au fait que certains instruments ne sont pas bombés initialement. Pour résister à la charge des cordes, plusieurs solutions s'offrent au fabricant : augmenter l'épaisseur de la table, ajouter des barres ou donner du bombé. Pour une tension de cordes assez faible (assez ne sera pas discuté ici),

augmenter l'épaisseur ou ajouter des barres peuvent être des solutions suffisantes pour le facteur. Ainsi, les instruments anciens pour lesquels les cordes ne sont pas très tendues n'ont pas « mécaniquement besoin » de bombé pour résister aux cordes.

### 3.5 Conclusion

Les précontraintes dans les tables d'harmonie ont deux origines distinctes, quelque soit l'instrument : le chargement des cordes (trois points d'application possibles) et le bombé initial donné à la table. Pour les trois points de chargement des cordes, c'est le contact au chevalet qui est le lieu où les efforts appliqués à la table d'harmonie sont les plus importants. Le bombé est donné principalement par des barres cintrées et/ou une plateforme de collage creuse, mais l'hygrométrie peut le modifier sensiblement. Le chargement des cordes est vécu comme nécessaire et le bombé comme une solution technique s'opposant à ces efforts. Le concept de précontrainte d'Eugène Freyssinet est donc approprié pour le bombé, car il est fait pour assurer la permanence de la table face aux efforts des cordes tendant à la détruire. Une dénomination « charge des cordes » et « précontrainte » (pour le bombé), comme on l'entend quelques fois en facture de piano, pourrait s'appliquer à ces différents instruments, dans une logique équivalente à celle du Génie Civil.

Ces observations serviront de guide pour les travaux qui suivent. Pour étudier les processus mécaniques mis en jeu lors de l'application des précontraintes par les facteurs d'instruments, les simplifications nécessaires au travail de modélisation ne devront pas abandonner l'espace à deux paramètres issus de ces deux modes de chargements. Il ne faudra pas non plus perdre de vue la différence de « nature » de ces deux paramètres, l'un (le bombé) servant d'état initial, s'opposant à la nécessité de l'autre (le chargement des cordes). Ces observations quelque peu abstraites trouveront leur sens dans les chapitres suivants.

Mais la spécificité et la richesse de la facture instrumentale est que la résolution des problèmes mécaniques se fait en interaction avec la recherche de qualité sonore, ce qui complique beaucoup le jeu entre les différents « paramètres » de facture et les visées qualitatives.

L'étude de cette interaction serait certainement très féconde, mais sort en bonne partie du cadre de ce manuscrit. On pourra se référer aux travaux préliminaires de Pascale Cheminée [13; 14] sur ce sujet, qui donnent d'ores et déjà le lexique employé par les pianistes et les facteurs pour parler de la qualité d'un son de piano. Par exemple, l'adjectif *clair* possède plusieurs définitions selon le contexte pour les musiciens, ces définitions étant parfaitement partagées. Un dernier résultat préliminaire porte sur la perception du réglage de la charge du piano de trois musiciens et trois facteurs [14]. Il montre que ces sujets perçoivent des différences nettes des qualités de l'instrument avec la modification de la charge.

---



Première partie

**Vibrations linéaires de systèmes  
précontraints**

---



## Chapitre 4

# Théorie des précontraintes

Le chapitre précédent a montré que les précontraintes étaient pertinentes pour modéliser certaines étapes de la fabrication des instruments à table d'harmonie. Nous utiliserons ainsi la théorie des précontraintes dans toute la première partie de la thèse. Même si elle est bien connue des ingénieurs, cette théorie n'est présentée que dans peu d'ouvrages (ce lui de Géradin et Rixen [36] et de Fertis [24]). Nous avons donc choisi de la présenter ici. La présence de précontraintes dans une structure conduisant à poser la question de sa stabilité, nous rappellerons aussi quelques principes généraux sur les diverses instabilités existantes (voir par exemple le livre de Nguyen Quoc Son [82] pour plus de détails).

### 4.1 Vibrations linéaires des structures élastiques précontraintes

Soit une structure dans son état naturel sans précontraintes  $\Omega_0$ . On la soumet à une précontrainte, c'est-à-dire un champ de contraintes initial  $\sigma_{ij}^0$  et un champ de déformations initial  $\varepsilon_{ij}^0$ , supposés connus. La structure se trouve alors dans la configuration  $\Omega^*$ , qui servira d'état de référence. Cet état est obtenu selon les cas par une transformation infinitésimale ou une transformation finie, plus précisément sous l'hypothèse de grands déplacements petites déformations. Le problème qu'on se propose de résoudre est l'étude des vibrations autour de cet état précontraint. Pour cela, il faut ajouter des champs de contraintes  $\sigma_{ij}^*$  et de déplacements  $u_i^*$ . On a alors :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^* \quad (4.1)$$

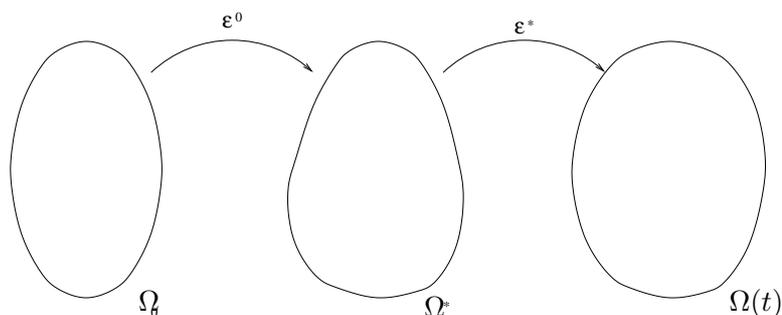


FIG. 4.1 – Différentes étapes de la vibration d'une structure précontrainte.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^* \quad (4.2)$$

comme respectivement états de déformation obtenu par élasticité et de contrainte dans la configuration de référence  $\Omega^*$ . La trajectoire est donnée par le principe de Hamilton, porté par le déplacement par rapport à l'état de référence :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (4.3)$$

$$\delta u_i^*(t_1) = \delta u_i^*(t_2) = 0 \quad (4.4)$$

où  $T$  et  $V$  sont les énergies cinétique et potentielle acquises par la structure lors de son trajet depuis son état initial  $\Omega^*$  à son état déformé  $\Omega(t)$ . Ce principe exprime que la trajectoire réelle du système est celle qui rend stationnaire le lagrangien du système  $L = T - V$ . Il reste alors à développer les expressions de  $T$  et de  $V$ , et ainsi établir le principe de Hamilton dans le cas d'une structure précontrainte.

On a :

$$T = T^* = \int_{\Omega^*} \rho^* \dot{u}_i^* \dot{u}_i^* dV \quad (4.5)$$

L'énergie cinétique s'exprime donc à partir des déplacements additionnels  $u_i^*$  et de la masse volumique  $\rho^*$ , sans que n'apparaissent les termes de précontraintes. L'énergie potentielle se met sous la forme :

$$V = V_{int} + V_{ext} \quad (4.6)$$

où  $V_{int}$  est l'énergie de déformation et  $V_{ext}$  l'énergie potentielle des forces externes. Pour un matériau élastique linéaire, la densité d'énergie élastique est  $W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$  (les  $C_{ijkl}$  étant 21 coefficients distincts dans le cas général) donne l'expression de  $V_{int}$  :

$$V_{int} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} C_{ijkl} (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^*) (\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^*) dV \quad (4.7)$$

$$= V_{int}^0 + \int_{\Omega^*} (C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^* + C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^*) dV \quad (4.8)$$

où  $V_{int}^0$  est l'énergie de déformation initiale.  $V_{int}^0$  étant constante, sa contribution lors de l'application du principe de Hamilton est nulle. Elle sera donc oubliée dans la suite. Il est préférable de réécrire la déformation additionnelle  $\varepsilon_{ij}^*$  :

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_m^*}{\partial x_j} \right) \quad (4.9)$$

$$= \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \varepsilon_{ij}^{*(2)} \quad (4.10)$$

faisant ainsi apparaître les termes linéaires  $\varepsilon_{ij}^{*(1)}$  et quadratiques  $\varepsilon_{ij}^{*(2)}$ . L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$V_{int} = \int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(2)} dV + \int_{\Omega^*} C_{ijkl} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{*(1)} \varepsilon_{kl}^{*(1)} + \varepsilon_{ij}^{*(1)} \varepsilon_{kl}^{*(2)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{*(2)} \varepsilon_{kl}^{*(2)} \right) dV \quad (4.11)$$

Remarque : Le champ de contraintes initial  $\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^0$  arrive naturellement dans l'expression de  $V$  pour la loi de comportement linéaire considérée. Mais ceci n'indique rien sur le type de transformation à l'origine de  $\varepsilon_{ij}^0$ , ce dernier étant supposé connu. Les effets de la nature de cette transformation seront discutés dans les paragraphes suivants.

Pour des déformations additionnelles assez petites, on peut se limiter aux termes du second ordre et finalement :

$$V_{int} = \int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(2)} dV + \int_{\Omega^*} C_{ijkl} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{*(1)} \varepsilon_{kl}^{*(1)} \right) dV \quad (4.12)$$

$$= \int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(2)} dV + V_{int}^* \quad (4.13)$$

$V_{int}^*$  est l'énergie des déformations linéaires additionnelles.

L'énergie potentielle des forces externes s'exprime à partir des forces volumiques  $\bar{X}_i$  sur  $\Omega^*$  et surfaciques  $\bar{t}_i$  appliquées sur  $\Gamma_\sigma$  :

$$V_{ext} = - \int_{\Omega^*} (\bar{X}_i^0 + \bar{X}_i^*) u_i dV - \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{t}_i^0 + \bar{t}_i^*) u_i dS \quad (4.14)$$

$$= V_{ext}^0 + V_{ext}^* \quad (4.15)$$

où  $V_{ext}^0$  est le potentiel des forces externes de précontrainte et  $V_{ext}^*$  le potentiel des forces externes additionnelles.

L'énergie potentielle totale s'écrit alors :

$$V = \int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(2)} dV + V_{int}^* + V_{ext}^0 + V_{ext}^* \quad (4.16)$$

La structure précontrainte étant en équilibre statique, on a :

$$\int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^{*(1)} dV + \delta V_{ext}^0 = 0 \quad (4.17)$$

et la variation de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\delta V = \delta(V_g + V_{int}^* + V_{ext}^*) \quad (4.18)$$

où  $V_g$  est l'énergie géométrique de précontrainte, telle que

$$V_g = \int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(2)} dV \quad (4.19)$$

Le principe d'Hamilton pour une structure précontrainte s'écrit finalement :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T^* - V_{int}^* - V_g - V_{ext}^*) dt = 0 \quad (4.20)$$

$$\delta u_i^*(t_1) = \delta u_i^*(t_2) = 0 \quad (4.21)$$

On remarque que la contrainte initiale n'intervient que dans l'énergie géométrique de précontrainte. Cette énergie dépendant explicitement de la partie quadratique de la déformation additionnelle  $\varepsilon_{ij}^{*(2)}$ , la prise en compte des termes du second ordre est indispensable pour faire apparaître l'influence des précontraintes sur les déplacements additionnels. Cette énergie géométrique supplémentaire dans le principe de Hamilton implique que les précontraintes modifient les fréquences propres de vibration.

### 4.1.1 Evaluation des précontraintes

La présentation théorique montrait précédemment que le problème des précontraintes se résolvait bien en prenant la configuration précontrainte comme référence. Mais ceci suppose que les champs de contraintes et de déformations initiaux soient connus, ce qui n'est jamais le cas. Certaines hypothèses permettent de pallier à ce problème. Ces hypothèses et les analyses qui en découlent nécessitent l'introduction d'une grandeur  $\lambda$ , paramètre de charge fixant le niveau des efforts appliqués.

#### 4.1.1.1 L'hypothèse de faibles pré-déformations

Sous l'hypothèse où les déformations initiales  $\varepsilon^0$  sont assez petites

$$\sigma^0(\lambda) = \lambda \sigma_1^0 \quad (4.22)$$

$\sigma_1^0$  étant issu d'une transformation infinitésimale, il est connu. On trouve donc aisément  $\sigma^0(\lambda)$  et  $\varepsilon^0(\lambda)$  sous cette hypothèse "linéaire".

#### 4.1.1.2 Le cas non-linéaire

Lorsque les déformations initiales sont grandes, l'approximation précédente n'est plus valable. La réponse statique est alors non-linéaire et le recours au calcul numérique est souvent nécessaire. La résolution du problème approché se fait alors classiquement par des méthodes incrémentales, comme par exemple celle de Newton-Raphson. Nous développerons cette méthode et les hypothèses dont elle découle dans le paragraphe dédié à la résolution numérique.

## 4.2 Analyse de stabilité

La formulation du problème précontraint permet d'étudier une position d'équilibre  $(u_e, \lambda_e)$  et sa stabilité. Dans le cas d'un équilibre statique, les forces additionnelles sont nulles et l'énergie potentielle s'écrit :

$$V(u, \lambda) = V_{int}^*(u, \lambda) + V_g(u, \lambda) \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

A l'équilibre statique, on a :

$$\delta V(u, \lambda) = \delta(V_{int}(u, \lambda) + V_g(u, \lambda)) = 0 \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

La résolution de ce problème donne l'ensemble des états d'équilibre du système, dans l'espace  $u * \lambda$ . Certains de ces points d'équilibre peuvent être instables, ce sont les points critiques. Selon le système à étudier, les points critiques seront appelés points limites ou points de bifurcation.

### 4.2.1 Point limite

L'exemple le plus connu illustrant la notion de point limite est le claquage ("snap through" en anglais) d'un cadre rectangulaire. Si l'on fait croître  $\lambda$  depuis 0, le système

va basculer brutalement de l'autre côté pour une certaine valeur  $\lambda_c$  appelée charge de claquage. Dans le cas des systèmes claquant, les points d'équilibre forment une unique courbe. Les équilibres se situant sur une portion montante de cette courbe sont stables et ceux sur une portion descendante sont instables.

### 4.2.2 Point de bifurcation

Le flambage d'Euler d'une poutre droite est un exemple classique de bifurcation. Lorsque les points d'équilibre forment plusieurs courbes, un phénomène dit de bifurcation peut apparaître. Les points d'équilibre qui se situent à l'intersection de plusieurs courbes sont ainsi appelés points de bifurcation. Au contraire des points limite, il n'y a pas de saut brutal en un point de bifurcation. Mais dans ce cas, le système va suivre une branche d'équilibres puis va bifurquer sur une autre sans discontinuité lors de son trajet de chargement.

### 4.2.3 Critères d'instabilité

Les points critiques sont obtenus par l'annulation de la variation seconde de l'énergie potentielle :

$$\delta^2 V(u_e, \lambda_e) = \delta^2 (V_{int}(u_e, \lambda_e) + V_g(u_e, \lambda_e)) = 0 \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

Un point critique sera donc caractérisé par le caractère singulier de l'opérateur des dérivées secondes  $\delta^2 V(u_e, \lambda_e)$ . Cet opérateur aura donc  $\mu = 0$  comme valeur propre. Soit  $X$  le vecteur propre (supposé unique) associé à cette valeur propre. Si  $(X, 0)$  est la seule solution du problème, le point critique est un point limite, sinon le point critique est un point de bifurcation.

Les vibrations sont aussi utilisables comme critère de stabilité. En effet, l'équation de Hamilton en dynamique précontrainte offre un cas limite ( $T^* = 0$ ), pour lequel une fréquence propre de vibration s'annule. Tout point critique est donc caractérisé par l'annulation d'une fréquence propre pour une vibration autour de ce point.

## 4.3 Discrétisation spatiale par la méthode de Rayleigh-Ritz

Dans le cas où l'on ne peut trouver de solution analytique exacte à un problème d'élastodynamique, on peut appliquer la méthode de Rayleigh-Ritz au principe d'Hamilton. Cette méthode consiste à réduire le problème continu à un problème de substitution à  $n$  degrés de liberté. Pour cela, on commence par choisir des fonctions d'approximations pour le champ de déplacement puis on discrétise le principe d'Hamilton. (la question de la convergence de la discrétisation vers les caractéristiques du système continu n'est pas traitée ici mais soulève toujours des problèmes mathématiques, en fonction des équations étudiées)

Chaque composante du champ de déplacement  $u_i$  est décrite par une série de fonctions  $f_{ij}$  multipliées par une amplitude  $q_j(t)$ . L'approximation prend ainsi la forme :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j(x_1, x_2, x_3) q_j(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.29)$$

que l'on peut réécrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{N}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{q}(t) \quad (4.30)$$

où  $\mathbf{q}(t)$  est le vecteur des coordonnées généralisées

$$\mathbf{q}(t) = [q_1 \dots q_n]^T \quad (4.31)$$

et  $\mathbf{N}$  est la matrice d'interpolation des déplacements de dimension  $3 * n$  :

$$\mathbf{N}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_{11}(x_1, x_2, x_3) & \dots & f_{1n}(x_1, x_2, x_3) \\ f_{21}(x_1, x_2, x_3) & \dots & f_{2n}(x_1, x_2, x_3) \\ f_{31}(x_1, x_2, x_3) & \dots & f_{3n}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

La déformation s'écrit alors :

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{q}(t) \quad (4.33)$$

où  $\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{D}\mathbf{N}(x_1, x_2, x_3)$  est la matrice d'interpolation des déformations de dimension  $6 * n$ , avec  $\mathbf{D}$  la matrice d'interpolation des déplacements. On peut alors écrire la discrétisation des différentes énergies intervenant dans le principe d'Hamilton dans le cas précontraint (equation 4.21) :

– L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.34)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice des masses du système discrétisé de dimension  $n * n$ , symétrique et définie positive :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega^*} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (4.35)$$

– L'énergie potentielle interne :

$$V_{int} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4.36)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice des raideurs du système discrétisé de dimension  $n * n$ , symétrique et définie positive :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^*} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} dV \quad (4.37)$$

et  $\mathbf{H}$  est la matrice des coefficients de Hooke.

– L'énergie géométrique de précontrainte :

$$V_g = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_g \mathbf{q} \quad (4.38)$$

où  $\mathbf{K}_g$  est la matrice de raideur géométrique du système discrétisé, de terme général :

$$[\mathbf{K}_g]_{kl} = \int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^0 \frac{\partial f_{mk}}{\partial x_i} \frac{\partial f_{ml}}{\partial x_j} dV \quad k, l = 1, \dots, n \quad (4.39)$$

– L'énergie des efforts extérieurs :

$$V_{ext} = -\mathbf{q}^T \mathbf{g} \quad (4.40)$$

où  $\mathbf{g}$  est le vecteur des charges :

$$\mathbf{g} = \int_{\Omega^*} \mathbf{N}^T \bar{X} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \bar{t} dS \quad (4.41)$$

On trouve ainsi le principe de Hamilton sous forme discrétisée :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_g \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{g} \right) dt = 0 \quad (4.42)$$

On trouve ainsi les équations du mouvement sous forme discrétisée :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g) \mathbf{q} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(t) \quad (4.43)$$

Sous l'hypothèse de vibration libre et de mouvement harmonique, on a l'expression du problème aux valeurs propres discrétisé :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g) \mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q} \quad (4.44)$$

où les  $\omega^2$  sont les valeurs propres du problème approché, carrés des pulsations propres du système vibrant précontraint.

## 4.4 Calcul des modes de vibration dans le cas précontraint

Comme pour le problème continu, il reste à déterminer la rigidité géométrique  $\mathbf{K}_g$ , c'est-à-dire l'état précontraint  $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ .

### 4.4.1 Cas de faibles pré-déformations

Dans le cas où les déformations initiales sont assez faibles, on applique l'hypothèse de pré-déformations (4.22) et on obtient :

$$\mathbf{K}_g = \lambda \mathbf{K}_g^* \quad (4.45)$$

Le problème aux valeurs propres discret s'écrit alors :

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g^*) \mathbf{q} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q} \quad (4.46)$$

On trouve ainsi les effets du paramètre de chargement  $\lambda$  sur les fréquences de vibrations. Il est aussi possible avec cette méthode de trouver une approximation des charges critiques. En fixant  $\omega = 0$ , la stabilité s'écrit :

$$(\mathbf{K} + \lambda_i \mathbf{K}_g^*) \mathbf{q}_i = 0 \quad (4.47)$$

Les valeurs propres donnent les charges critiques  $\lambda_i$  et les vecteurs propres sont les directions de flambage.

### 4.4.2 Cas de pré-déformations importantes

L'hypothèse des faibles pré-déformations n'est pas valable dans la plupart des cas, en particulier dans les études proches du claquage. Pour décrire précisément la position d'équilibre  $(u, \lambda)$  autour de laquelle le système vibre et caractériser les éventuels points critiques, on passe souvent par le calcul numérique (voir par exemple Reddy [74]).

#### 4.4.2.1 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est utilisée classiquement pour résoudre ce problème. Méthode incrémentale, elle consiste à approcher une courbe d'équilibres par des incréments successifs  $\Delta u$  associé à des incréments du paramètre de charge  $\Delta \lambda$ . Ce calcul étant non linéaire, on procède par itérations successives sur de petits incréments. Si l'on écrit les équations d'équilibre sous la forme

$$R(u, \lambda) = 0 \quad (4.48)$$

les équations incrémentales sont :

$$\frac{\partial R}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \delta \lambda = 0 \quad (4.49)$$

que l'on peut réécrire :

$$K \delta u = f \quad (4.50)$$

où

$$K = \frac{\partial R}{\partial u} \text{ et } f = -\frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (4.51)$$

L'état suivant  $(u + \delta u, \lambda + \delta \lambda)$  ne satisfait pas nécessairement les équations d'équilibre. On écrit en ce point :

$$R(u + \delta u, \lambda + \delta \lambda) = \frac{\partial R(u, \lambda + \delta \lambda)}{\partial u} \cdot \delta u + \dots \quad (4.52)$$

On améliore alors le résultat de la prédiction avec des corrections successives : On définit l'état suivant à partir des déplacements intermédiaires  $u_m$  tels que :

$$u_m = u_{m-1} + \delta u_m, K_{m-1} \delta u_m = R_{m-1} \quad (4.53)$$

où

$$K_m = \frac{\partial R(u_m, \lambda + \delta \lambda)}{\partial u} \text{ et } R_m = R(u_m, \lambda + \delta \lambda) \quad (4.54)$$

Ce schéma itératif converge bien pour  $m \rightarrow \infty$  vers un état d'équilibre  $(u + \delta u, \lambda + \delta \lambda)$  dans le cas où l'équilibre est bien assuré pour le niveau de charge  $\lambda + \delta \lambda$ . On voit donc que cette méthode est difficilement utilisable au voisinage d'un point limite ou d'un point de bifurcation. Les méthodes asymptotiques comme la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) (développée dans [15]) sont plus performantes dans ces cas.

## 4.5 Résumé

Le principe de Hamilton dans le cas précontraint à trois dimensions a été exprimée. Ceci a montré que l'énergie géométrique de précontrainte apparaît avec la prise en compte des termes quadratiques du tenseur de déformations. L'énergie géométrique implique des modifications des modes propres de vibration. Elle permet aussi d'étudier la stabilité des points d'équilibre.

Si les pré-déformations sont faibles, l'état précontraint est facilement calculable. Dans le cas contraire, on utilise le calcul numérique, en particulier la méthode de Newton-Raphson.

Les travaux présentés dans cette première partie sont une application de ces concepts au savoir-faire des fabricants d'instruments à tables d'harmonie. Nous tenterons dans la suite de répondre aux questions du type : L'hypothèse des faibles pré-déformations est-elle suffisante pour modéliser ce savoir-faire ? Quelles sont les tendances dans les modifications des propriétés vibratoires avec les précontraintes ?

## Chapitre 5

# Calcul numérique sur une table d'harmonie de piano précontrainte

Ce chapitre contient un calcul numérique sur un modèle de table d'harmonie de piano. On y verra comment la charge statique imposée par les cordes induit des modifications dans les vibrations de la table. Plus précisément, nous montrons que le réglage de cette charge ainsi que celui du bombé ont des effets significatifs sur les modes de vibration de la table.

Ce travail suit plusieurs études réalisées depuis quelques années à l'Université Pierre et Marie Curie avec Joël Frelat et Charles Besnainou (voir par exemple [25]) à partir du stage de Vincent Maurel ([56]).

### 5.1 Synthèse de travaux antérieurs

Le chapitre 3 était consacré à la description du savoir-faire des fabricants d'instruments de musique à partir de leur propre discours. Nous allons maintenant nous attacher à ce qu'en disent les scientifiques. Cette distinction est quelque peu artificielle car nombreux des auteurs cités dans ce chapitre sont aussi ingénieurs chez des fabricants. Toutefois leur démarche se fonde ici sur des mesures ou des modèles, caractéristiques d'un souci d'objectivation qui diffère des descriptions précédentes.

La littérature étant très vaste, nous nous concentrons sur la fabrication du piano et plus particulièrement sur ses conséquences sur les propriétés vibratoires de la table d'harmonie. Déjà en 1940, P. H. Billhuber et C. A. Johnson [8] effectuent des mesures tendant à évaluer le savoir-faire de l'entreprise Steinway & Sons. Ces mesures s'appuient sur les étapes qu'ils considèrent déterminantes : la mise en charge et le bombé de la table. Ils remarquent des différences notables dans l'énergie vibratoire selon le réglage de la charge. Ils préconisent ainsi une charge uniformément répartie pour obtenir une qualité optimale. Mais comment évaluer cette qualité ? Pas un mot dans leur travail, ce qui reflète bien la difficulté d'une recherche sur le savoir-faire.

#### 5.1.1 Analyses modales

Depuis P. H. Billhuber et C. A. Johnson [8], plusieurs recherches ont porté sur les tables d'harmonie. Principalement expérimentales, certaines ont produit des analyses modales. Leurs résultats concernant la valeur des premières fréquences propres sont résumés dans le tableau 11.1. Ces mesures ont été faites dans des cas très différents : une table de

---

piano de concert sans chevalet montée sur le meuble (H. A. Conklin [16], noté Conk.), avec chevalets et cordes (K. Wogram [99], noté Wog.), d'un piano quart de queue sur son meuble sans cordes (H. Suzuki [85], noté Suz.), sans meuble ni chevalet (J. Berthaut et al. [6], noté Berth.), d'un piano droit sans cordes : (I. Nakamura [61] noté Nak. et Moore and Zietlow [60] noté Moo1), avec cordes (Moore and Zietlow [60] noté Moo2) et un piano droit expérimental sans et avec cordes (I. Nakamura [61] notés Nak. exp1 et Nak. exp2) .

Mode	Conk.	Wog.	Suz.	Berth.	Nak.	Nak. exp1	Nak. exp2	Moo1	Moo2	Dér.
1	49	62	49.7	11.8	55	59	100	80	112	122
2	66.7	90	76.5	12.7	109	107	134	110	129	160
3	89.4	105	85.3	13.4	140	150	182	170	204	189
4	112.8	127	116.1	18	169	170	227	219		199
5	184	187	135.6	24.9	193	205	255	830		231
6	306	222	161.1	36.7	241	245	357	2837		247
7		245		41.7	258	255	569			282
8		325		52.4	366	295	589			308
9				55.2		325				326
10				56.9		349				350

TAB. 5.1 – Fréquences propres (en Hz) mesurées dans la littérature à partir d'une analyse modale sur un piano.

Les mesures du tableau 11.1 ont été faites, pour la plupart, sur des modèles de piano différents, mis à part pour Nakamura [61] et pour Moore and Zietlow [60] qui ont effectué l'expérience sur un piano droit non chargé par les cordes et [60] et [20] pour un piano droit avec cordes. On remarque des différences significatives dans les fréquences propres. Ceci montre bien que les techniques de fabrication associées à chacun de ces instruments ont des effets notables sur les vibrations.

### 5.1.2 Mesures de mobilité

Mais la méthode la plus largement utilisée est certainement la mesure de mobilité, définie comme l'inverse de l'impédance mécanique, c'est-à-dire :

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{v(\omega)}{F(\omega)} \quad (5.1)$$

où  $\omega$  est la pulsation,  $Y$  la mobilité,  $Z$  l'impédance,  $F$  la force appliquée et  $v$  la vitesse au lieu d'application de la force. La mobilité est ainsi caractéristique de la capacité à se mouvoir d'une structure. Très schématiquement, on peut dire que du point de vue de la corde qui l'excite, la table d'harmonie possède une mobilité très faible, comme un ressort très raide, qu'il faut exciter très fort pour le faire vibrer [3]. La plupart des auteurs cités précédemment, auxquels on peut ajouter N. Giordano ([33; 32]), ont fait des mesures de mobilité. Les protocoles expérimentaux sont en effet plus légers que ceux de l'analyse modale et donnent des résultats complémentaires intégrant les phénomènes de dissipation (voir plus de détails au paragraphe 5.3.3.1). C'est sans doute H. A. Conklin [16] et K. Wogram [99] qui utilisent le plus ces mesures pour évaluer les savoir-faire. L'épaisseur des barres n'affecte pas l'impédance dans l'extrême aigu du grand chevalet. En revanche,

les résonances deviennent de plus en plus prononcées (les pics sont plus étroits) avec la réduction de l'épaisseur des barres et les fréquences de résonances décroissent. Au-dessus de 500Hz, les effets sont moins marqués. C'est ainsi une perte de rigidité plus qu'une perte de masse qui caractérise la table avec des barres moins hautes que la normale, conformément à la théorie puisque le moment d'inertie d'une barre est proportionnel au cube de la hauteur alors que la masse est seulement proportionnelle à la hauteur. Affiner les bords de la table implique aussi des différences sur les mobilités. Toutefois, c'est la mise en charge qui a les effets les plus marqués. D'après les mesures de K. Wogram [99] sur un piano droit, la mise en tension affecte principalement les modes de fréquences inférieures à 200 Hz. Par exemple, la première fréquence vaut 70 Hz sans les cordes à 115 Hz avec les cordes tendues normalement. Pour H. A. Conklin [16], la tension des cordes modifie grandement les vibrations de la table d'harmonie. Le premier pic varie de 48 à 60 Hz. Mais surtout, il constate une chute de l'intervalle de variation d'amplitude atteignant 40 dB sans les cordes chutant à 20 dB avec les cordes dans l'intervalle [30Hz 200Hz]. En revanche, la présence des cordes n'affecte quasiment pas la mobilité au-dessus de 1 kHz. Il mesure de plus des mobilités dans la direction longitudinale et montre des modifications importantes à hautes fréquences.

### 5.1.3 Modèles de tables de piano

Certains auteurs ont effectué des modélisations de la table d'harmonie. N. Giordano [31], dans le souci de créer un modèle temps-réel utilisable pour la synthèse sonore tente de simuler les mobilités par un modèle le plus simple possible. Il n'est toutefois pas assez fin pour étudier les savoir-faire, qui ont des effets trop subtils pour être intégrés dans ces démarches. Ce point de vue est confirmé par les travaux de Berthaut et al. [6], qui montrent qu'une modélisation analytique d'une table avec barrage avec un procédé d'homogénéisation n'est pas satisfaisant pour décrire les vibrations d'une structure aussi complexe.

Berthaut et al. [6] montrent en revanche la pertinence d'un modèle éléments finis reproduisant précisément la géométrie et les matériaux employés, avec une comparaison numérique-expérimental très convaincante. Wogram [99] et Conklin [16] y voient aussi un grand intérêt, car les éléments finis permettent la simulation de certains procédés de fabrication. Ils permettent en théorie de remplacer la fabrication de prototypes. L'importance du meuble a ainsi été montrée pour certains modes. Mais aucun de ces auteurs n'a introduit le bombé initial et les effets de la charge des cordes dans leurs modèles. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce chapitre.

### 5.1.4 La question du rayonnement

Nous avons traité précédemment des effets du savoir-faire sur les propriétés vibratoires. Mais le rôle acoustique de la table d'harmonie est de rayonner dans l'air, induisant un son audible à longue distance. Ses capacités à rayonner ont été étudiées par Suzuki [85] sur un piano quart de queue, Wogram [99] et Giordano [33] sur un piano droit. Wogram [99] a montré un maximum de rayonnement dans l'intervalle [100Hz 1000Hz]. Giordano [33] et Suzuki [85] trouvent plutôt une valeur moyenne du rayonnement constante entre 200Hz et 5kHz. Toutefois, aucun de ces auteurs n'a étudié les effets de paramètres de fabrication sur le son rayonné.

---

### 5.1.5 Et la qualité sonore ?

Il est évident que si le savoir-faire a des conséquences mécaniques, son développement a pour visée principale la qualité sonore, comme nous l'avons vu au premier chapitre. Pourtant, les articles portant sur la mécanique de la table d'harmonie font preuve de prudence sur cet aspect, et ne traitent que très rarement de la relation entre les gestes de fabrication et des qualités perçues. H. A. Conklin Jr. [16] aborde le sujet grâce à son expérience chez les pianos Baldwin, mais force est de constater que son discours s'apparente à celui de H. Billhuber et C. A. Johnson en 1940 [8], et n'a pas intégré les méthodes développées en psychoacoustique et plus généralement en sciences cognitives.

Toutefois H. A. Conklin [16] soulève quelques tendances, que nous résumons ici bien qu'elles restent discutées encore aujourd'hui. L'orientation des fibres du bois relativement aux barres et aux chevalets joue sur la qualité sonore, en particulier dans l'équilibre basses-aiguës. Il y a une relation forte entre la mobilité de la table et la qualité sonore. Les instruments ayant un son agréable ont leur niveau moyen de mobilité à haute fréquence qui décroît légèrement. S'il décroît plus, le son durera plus longtemps et aura un niveau plus faible qu'un son « normal ». Au contraire, si la mobilité est trop grande, le son sera aigre (« harsh » en anglais) et aura une durée faible. Réduire l'épaisseur de la table dans les aigus a des effets bénéfiques sur la qualité sonore. Au contraire, si l'épaisseur est réduite partout, les mediums sonnent trop faibles. Cela provoque de plus une diminution du niveau perçu. Bien que l'augmentation de l'épaisseur ait l'effet contraire, elle est limitée par le fait que l'augmentation du niveau sonore est accompagné par une diminution de la durée. Le bombé de la table change l'équilibre entre les basses et les aiguës. Si la charge des cordes rend la table approximativement plate, les basses sont amplifiées. Trop de charge rend le son pauvre. Le chevalet a aussi un rôle important. Si les cordes étaient accrochées directement sur la table, le son serait très fort mais désagréable et trop court. La vibration longitudinale de la corde au chevalet est un « ingrédient » qui a des effets importants sur la qualité des aiguës.

Tous ces éléments montrent bien que la qualité sonore, bien que liée profondément aux savoir-faire, n'est généralement pas abordée de manière scientifique mais est justifiée par l'expérience, c'est-à-dire le savoir-faire lui-même. H. A. Conklin résume bien la relation entre savoir-faire et qualité sonore par une seule phrase : « to produce an instrument having at the same time a beautiful tone, excellent tonal duration, and superior loudness, challenges the designer. The final result usually involves some compromise. » [16] (Le fabricant vise un instrument possédant à la fois un beau son, d'une durée excellente et de du plus fort niveau possible. Le résultat final est généralement issu d'un compromis.). Bien que l'étude scientifique de ces questions soit nécessaire et intéressante, le travail qui suit ne s'y est pas attaché directement.

## 5.2 Un modèle numérique de table de piano

Les expériences précédemment citées ont montré des effets importants des savoir-faire sur les propriétés vibratoires. Les quelques modèles numériques déjà effectués montraient la pertinence de la modélisation pour analyser certains procédés de fabrication. Le travail qui suit tente de caractériser les effets vibratoires d'un élément important du savoir-faire : la charge des cordes. Pour cela, un modèle numérique de table est employé.

---

### 5.2.1 Caractéristiques du modèle

Le maillage du modèle numérique a été fait dans le cadre d'un stage de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées [10]. Il a consisté en la numérisation simplifiée de la table d'un piano IBACH de 1m80 datant de 1906 par un maillage éléments finis.



FIG. 5.1 – Photographies de la table d'harmonie du piano IBACH modélisé par la suite.

Ce maillage est constitué de la plaque principale, des deux chevalets et des 15 barres constituant la table. Le modèle a pris en compte précisément la géométrie de la table, la position des barres et des chevalets, et la réduction d'épaisseur sur les bords des barres. Les approximations effectuées ont été les suivantes :

- L'épaisseur de la table est considérée constante (bien que affinée sur les bords dans la réalité).
- Le chevalet des basses est réduit à une géométrie de poutre similaire à celle du long chevalet.

Ces choix ont été faits par souci de simplicité. En effet, l'objectif de ce modèle n'est pas de reproduire parfaitement la réalité mais plutôt d'étudier les seuls effets de la charge des cordes. Toutefois, les conséquences de ces simplifications seront discutées en fin de chapitre.

Les propriétés mécaniques des bois ont été tirées de la littérature [6].

$\rho$	$E_x$	$E_y$	$\nu_{xy}$	$G_{xy}$
$392 \text{ kg.m}^{-3}$	11.5 GPa	0.47 GPa	0.005	0.5 GPa

TAB. 5.2 – Propriétés mécaniques de l'épicéa d'après [6].

### 5.2.2 Stabilisation du maillage

La première étape dans un calcul de structure consiste à raffiner le maillage. Cette étape de stabilisation consiste à réduire le pas de discrétisation (et ainsi augmenter le nombre d'éléments) jusqu'à ce que les grandeurs calculées deviennent indépendantes du pas de maillage. Ici cette convergence s'est faite à partir des modes de vibration. La stabilisation se fait donc sur les fréquences propres. La figure 5.2 montre que les sept premières fréquences propres se stabilisent pour une taille d'éléments de maillage de l'ordre de 2 cm. Pour des

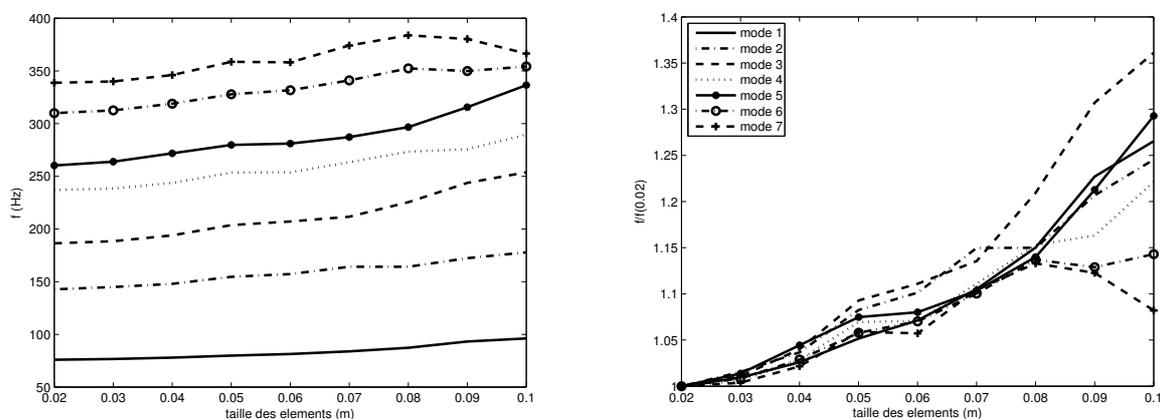


FIG. 5.2 – Stabilisation du maillage à partir de la convergence des 7 premières fréquences propres.

maillages moins fins, ces fréquences s'éloignent rapidement de ces valeurs, et dépassent ainsi 10% d'erreur pour des tailles de l'ordre de 8 cm. Nous avons donc choisi dans la suite des éléments de 2 cm, ce qui se traduit par un modèle comportant au total 3746 noeuds.

### 5.2.3 Modes de vibration de la table plate et effets des conditions aux limites

Une fois le maillage effectué, on résout le problème discrétisé aux valeurs propres classique sur la table d'harmonie :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{q} \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité élastique,  $\mathbf{q}$  le vecteur propre caractérisant la déformée modale,  $\omega$  la pulsation modale et  $\mathbf{M}$  la matrice de masse. Les six premières déformées

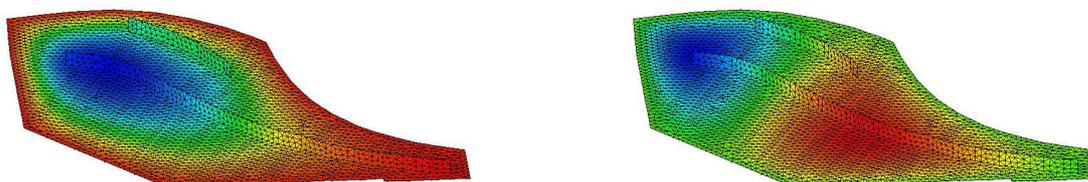


FIG. 5.3 – Déformées des deux premiers modes de vibration de la table d'harmonie plate en appui simple sur son bord.

présentées dans les figures 5.3, 5.4 et 5.5 ont des géométries assez similaires de celles que l'on peut trouver dans la littérature. On remarque pourtant une différence importante avec les mesures de Suzuki [85]. Au contraire de notre modèle, il trouve un troisième

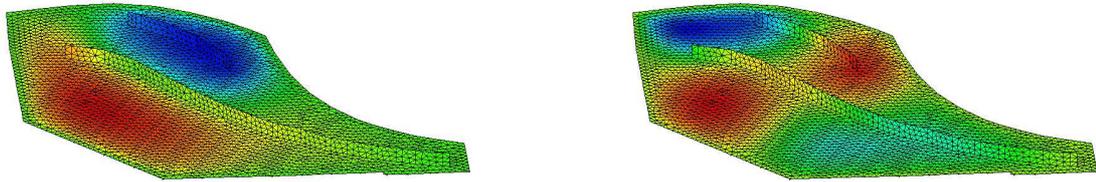


FIG. 5.4 – Déformées des modes de vibration 3 et 4 de la table d’harmonie plate en appui simple sur son bord.

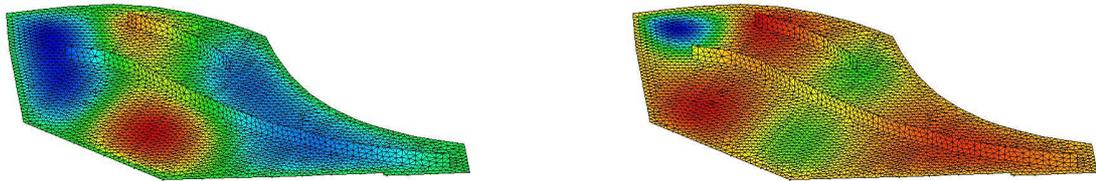


FIG. 5.5 – Déformées des modes de vibration 5 et 6 de la table d’harmonie plate en appui simple sur son bord.

mode possédant une forme semblable au deuxième mais un peu plus large. Expliquant sa présence par la vibration du meuble avec la table, il le nomme « rim mode ». Nous n’avons pas pris en compte dans notre modèle l’élasticité du meuble. Il est donc normal que nous n’observions pas ce mode.

Mode	encastré (Hz)	appuyé (Hz)	libre (Hz)
1	93.7	75.9	34.0
2	169	143	52.4
3	216	186	81.8
4	273	237	89.8
5	299	260	119
6	356	310	123
7	383	339	147

TAB. 5.3 – Fréquences des sept premiers modes selon les conditions aux limites.

Les conditions aux limites de la plaque ont des conséquences notables sur les fréquences propres. La figure 5.3 montre ces différences pour des bords encastrés, en appui simple et libres. On retrouve bien les ordres de grandeur des fréquences mesurées expérimentalement et résumées dans le tableau 11.1. Des différences notables avec l’expérience de Berthaut

et al. [6] en conditions aux limites libres est tout de même observable. Les fréquences que nous calculons sont nettement plus élevées que les leurs. Les différences de géométrie des deux tables (nous ne considérons pas le coin bas-gauche) expliquent en partie ces différences. Mais la différence majeure entre les deux modèles tient au fait que Berthaut et al. [6] ne prennent pas en compte les chevalets dans leurs calculs, ce qui leur fait perdre considérablement de rigidité.

#### 5.2.4 Modélisation du bombé initial

Comme il a été évoqué précédemment, le bombé initial de la table d'harmonie (d'un rayon de courbure compris entre 15m et 50m selon les fabricants [16]) est un élément majeur du savoir-faire. Klaus Fenner [23] décrit quatre méthodes différentes pour aboutir au bombé souhaité :

- première méthode : coller des barres plates à la table préalablement séchée sur un plateau de travail lui-même plat. Le retour à une humidité normale produit un léger bombé. Cette méthode est appelée *bombage naturel* (« natural crown » en anglais).
- deuxième méthode : coller des barres arrondies à la table sur un plateau de travail plat.
- troisième méthode : coller des barres plates à la table sur un plateau creux.
- quatrième méthode : coller des barres arrondies à la table sur un plateau creux avec la même courbure que les barres.

Ces méthodes se traduisent toutes en termes géométriques et de précontraintes. Mais les procédés sont très différents, et produisent donc des contraintes initiales et des géométries finales tout aussi différentes. Un travail précis sur leurs effets respectifs reste à faire et mérite une étude en soi. Nous avons choisi ici de nous limiter aux effets géométriques à partir d'un bombé arbitraire. Ce bombé est obtenu avec la résolution d'un problème harmonique scalaire sur le maillage avec une source constante sur tout le domaine et des conditions aux limites de Dirichlet. On obtient ainsi la hauteur en chaque point du maillage. Ceci permet d'avoir la régularité nécessaire pour éviter la localisation des efforts et le verrouillage numérique (voir C. De Souza [83] pour un bilan détaillé de ces problèmes). La figure 5.6 montre l'évolution des premières fréquences propres avec le niveau de bombé. On remarque une augmentation générale de ces fréquences, le bombé initial donnant en effet une rigidité de flexion plus importante (voir la fabrication en voûte des caisses de violon). On constate de plus que la fréquence du premier mode de vibration augmente plus rapidement que les autres, et croise la deuxième fréquence propre pour des bombés importants (un creux maximum supérieur à environ 4.8 fois l'épaisseur de la plaque).

Les déformées modales sont aussi très largement modifiées par le bombé. Les figures 5.7 et 5.8 montrent les changements de déformée du mode (0,0) selon le bombé. Ces modifications importantes de déformée modale avec la courbure ont été calculées analytiquement sur des systèmes simples (voir par exemple Nayfeh et al.[62] pour les poutres flambées). Le même genre de comportement se retrouve sur cette structure complexe, et ce quelque soit le mode.

Le bombé initial change fortement les fréquences et les déformées modales de la table d'harmonie.

---

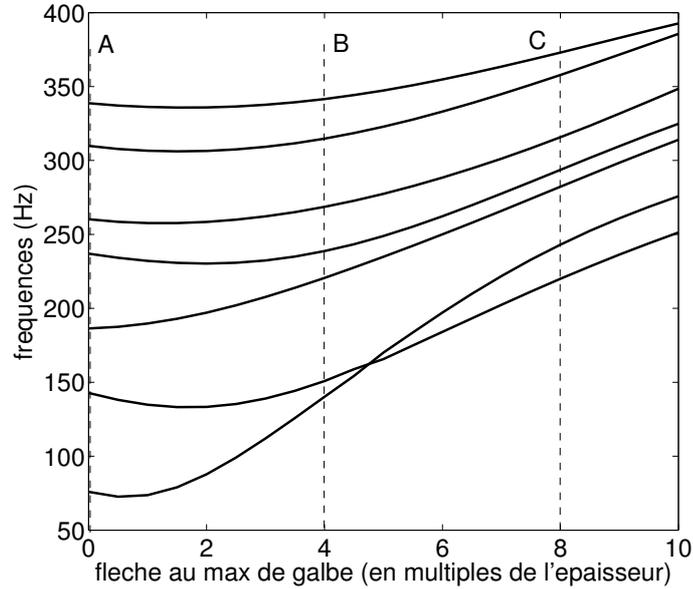


FIG. 5.6 – Evolution des fréquences propres avec le niveau de bombé (une flèche de 1 correspond à un rayon de courbure de 56m).

### 5.3 Modélisation de la charge des cordes

La charge des cordes est maintenant modélisée par un effort vertical réparti sur les deux chevalets. Cette force linéique prend des valeurs comprises entre 0 et 5000 N/m. D'après les références citées plus haut, cette valeur est au-delà des plus fortes charges introduites par les fabricants, ce qui permettra d'observer des résultats extrêmes et caricaturaux.

La modélisation se fait alors grâce à la théorie des précontraintes résumée au chapitre 4 appliquée à la table bombée constituée de la plaque, les deux chevalets et les quinze barres. Sa formulation discrétisée s'écrit :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\mathbf{q} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{q} \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice des raideurs de la table,  $\mathbf{K}_g$  la matrice de raideur géométrique,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\omega$  et  $\mathbf{q}$  sont respectivement les fréquences propres et vecteurs propres caractérisant les modes propres de vibration de la table. Dans la suite, l'accent est mis sur les différences entre les propriétés vibratoires de la table d'harmonie avec des précontraintes linéarisée et dans un cas non-linéaire complet. Les conséquences de la charge des cordes sur l'état statique de la table sont aussi évaluées par la suite.

#### 5.3.1 Précontraintes linéaires ou non-linéaires ?

Deux façons de mettre en précontraintes la table doivent être envisagées. La première consiste à postuler que les déplacements statiques initiaux de la table sont assez petits pour que la rigidité géométrique introduite soit proportionnelle au chargement :

$$(\mathbf{K} + \lambda_i\mathbf{K}_g^*)\mathbf{q}_i = 0 \quad (5.4)$$

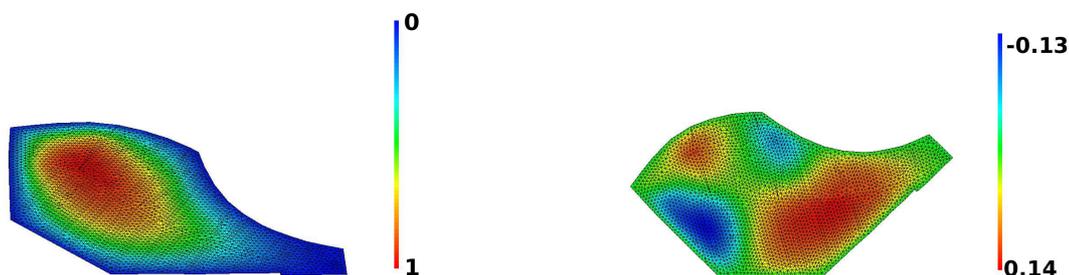


FIG. 5.7 – Déformée du mode 1 au point B (flèche maximale égale à 4 fois l'épaisseur) et différence relative entre les déformées du mode 1 au point A et au point B.

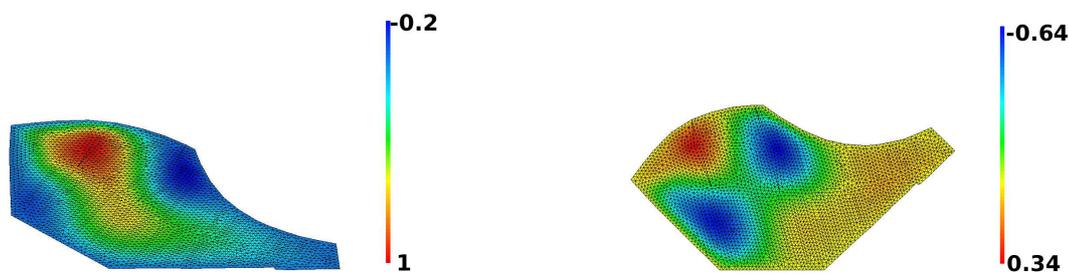


FIG. 5.8 – Déformée du mode 2 au point C (flèche maximale égale à 8 fois l'épaisseur) et différence relative entre la déformée du mode 1 au point A et du mode 2 au point C.

Cette approximation de « petits déplacements » a l'avantage de produire des calculs très rapides (quelques secondes). En effet, un seul calcul de la rigidité géométrique  $\mathbf{K}_g^*$  suffit. En revanche, elle peut donner des résultats erronés pour des déplacements plus grands. La deuxième méthode consiste à effectuer un calcul non-linéaire pas-à-pas, c'est-à-dire un calcul où la rigidité géométrique est réactualisée pour chaque nouvel état. Ceci qui donne des résultats beaucoup plus réalistes pour des déplacements importants. Mais cette technique nécessite un temps de calcul beaucoup plus grand (plusieurs minutes). On peut donc légitimement se demander si, dans le cas de la charge du piano, un modèle en petits déplacements est suffisant ou non. Une comparaison sur les déformées et sur les fréquences modales est utilisée par la suite pour trancher cette question.

### 5.3.1.1 Fréquences propres de vibration

La figure 5.9 montre les modifications des sept premières fréquences de vibration avec le chargement transverse, traduit en terme de précontraintes. Des différences significatives s'observent entre les précontraintes linéarisées et non-linéaires. Il faut toutefois noter que cette différence entre modèles linéaire et non-linéaire dépend fortement du bombé initial. On peut constater en effet sur la figure 5.10 que le modèle non-linéaire donne des différences les plus grandes pour un bombé valant deux fois l'épaisseur de la plaque. On atteint ainsi une différence de l'ordre de 20 % pour des déplacements valant 1.25 fois l'épaisseur de la

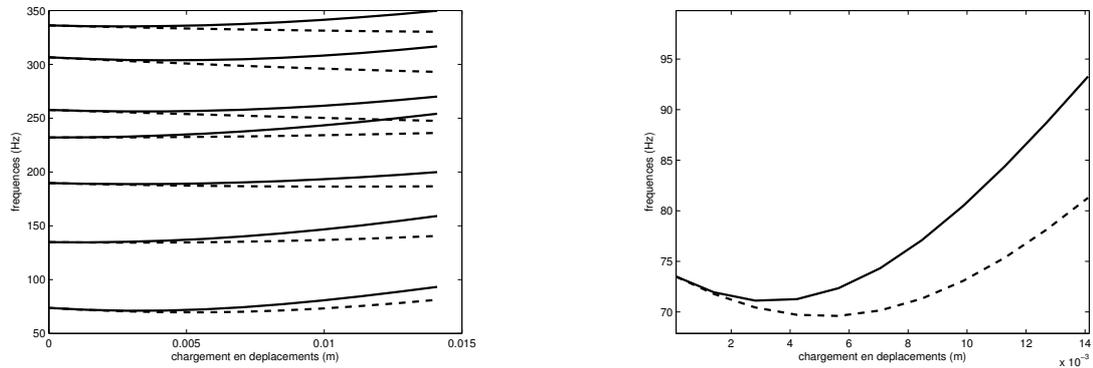


FIG. 5.9 – Exemple d'évolution des fréquences propres avec le chargement transverse pour un bombé valant l'épaisseur de la plaque avec des précontraintes linéarisées (pointillés) et non-linéaires (traits pleins). La figure de droite montre un zoom sur la première fréquence.

plaque. Pour des bombés plus grands, la figure 5.10 montre des différences moins marquées.

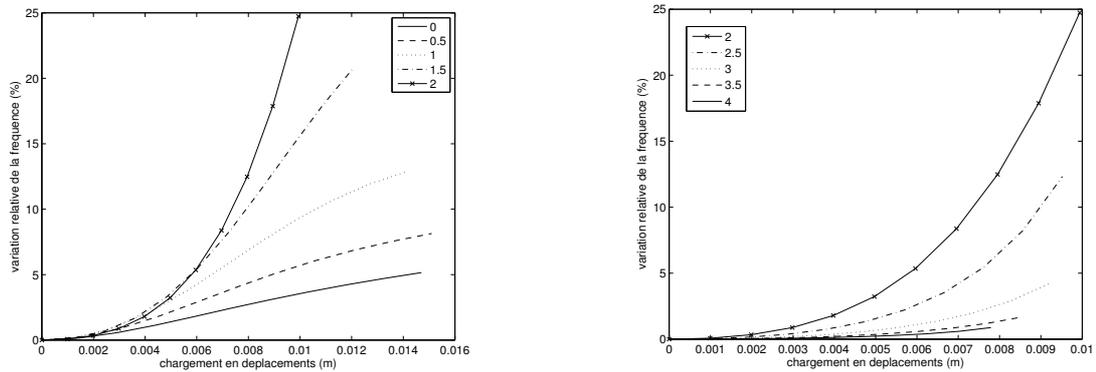


FIG. 5.10 – Effet du bombé initial sur les différences de valeurs de la première fréquence propre entre un modèle linéaire et un modèle non-linéaire.

### 5.3.1.2 Déformées modales

Si le choix du modèle change significativement l'évolution des fréquences propres du chargement, il apparaît aussi qu'il influe sur les géométries modales. Bien que le premier mode calculé en linéaire et non-linéaire sur la figure 5.11 semble le même, la figure 5.12 montre des différences significatives.

Les différences de géométrie du premier mode calculé par un modèle linéaire et non-linéaire montrent que le modèle linéaire donne un ventre modal plus proche des basses que le modèle non-linéaire. Cet effet pouvant avoir des conséquences non-négligeables sur le couplage avec les cordes et le rayonnement, le modèle linéaire semble insuffisant pour décrire les effets de la charge.

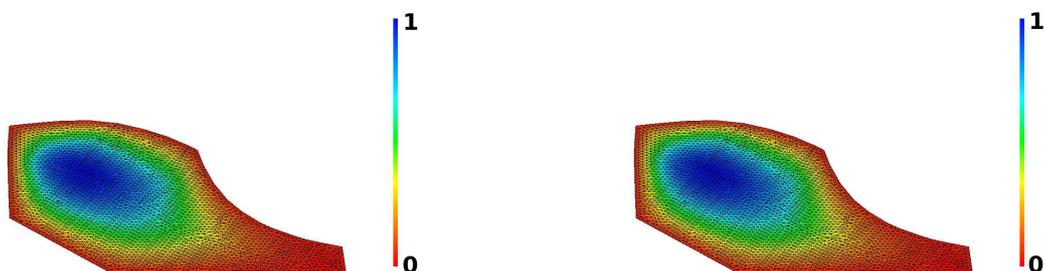


FIG. 5.11 – Premier mode de vibration d'une table plate avec un paramètre de chargement de 5.88mm avec un modèle linéaire (gauche) et non-linéaire (droite).

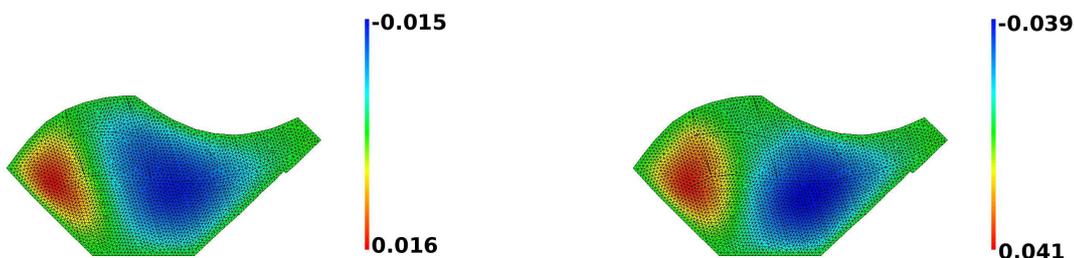


FIG. 5.12 – Différences relatives entre les géométries calculées avec des modèles linéaire et non-linéaire du premier mode d'une table sans bombé initial avec un paramètre de chargement transverse de 5.88mm (gauche) et 14.7mm (droite).

### 5.3.2 Effets de la charge transversale sur les modes propres de vibration

Le paragraphe précédent a montré la nécessité d'utiliser un modèle non-linéaire complet. Nous utiliserons dans la suite ce modèle pour décrire les effets de la charge transversale.

#### 5.3.2.1 Effets sur les fréquences propres

Comme le montrait la figure 5.9, les fréquences propres sont modifiées nettement par la charge transversale pour un bombé initial d'une épaisseur. Elles décroissent dans un premier temps puis augmentent. Mais ce constat n'est pas généralisable à tous les bombés initiaux. La figure 5.13 montre que dans le cas où la table est initialement plate, les fréquences subissent simplement une augmentation et pour une table avec un bombé initial de deux fois l'épaisseur de la plaque, les fréquences décroissent simplement dans le domaine de chargement raisonnable étudié. Les effets de la charge sur les fréquences dépendent donc du bombé initial de la table. Ce résultat qualitatif et quantitatif signifie qu'il est impossible de prédire les conséquences de la charge sans la connaissance de la forme initiale de la table d'harmonie. Ces deux composant du savoir-faire des fabricants sont indissociables.

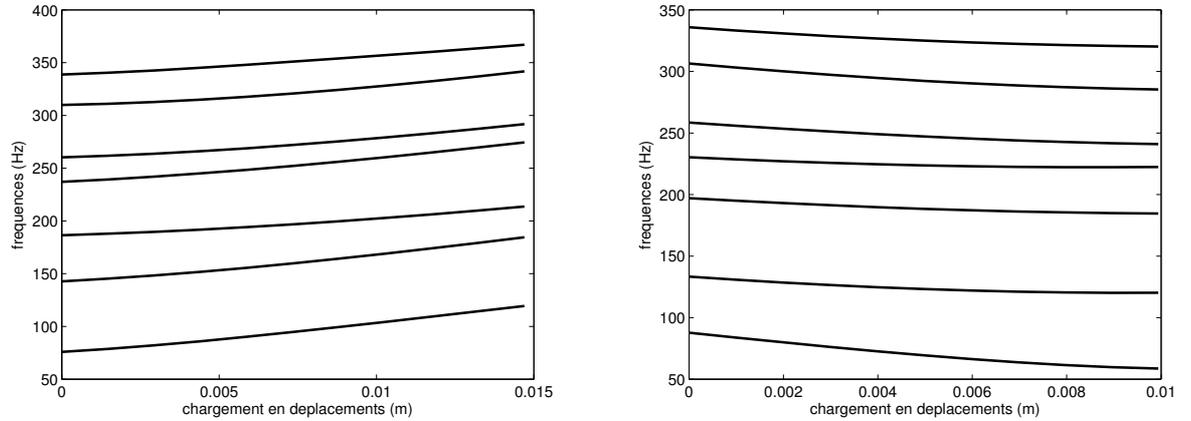


FIG. 5.13 – Effets de la charge transverse sur une table initialement plate (gauche) et avec un bombé de deux fois l'épaisseur (droite).

### 5.3.2.2 Coefficients non-linéaires

On peut maintenant exprimer des relations entre les fréquences propres et le paramètre de chargement en déplacements, que l'on postule sous forme polynomiale quadratique, cette forme est justifiée au chapitre suivant :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = k_2 \left(\frac{\lambda}{e}\right)^2 + k_1 \frac{\lambda}{e} + k_0 + O\left(\left(\frac{\lambda}{e}\right)^2\right) \quad (5.5)$$

où  $\omega$  est la pulsation propre,  $\omega_0$  la pulsation propre dans l'état sans chargement  $\lambda$  et  $e$  l'épaisseur de la plaque. Les tableaux 5.4, 5.5, 5.6, et 5.7 montrent les valeurs des

Mode	$k_2$	$k_1$	$k_0$	erreur max <sup>1</sup>
1	0.212	0.421	0.992	$8.00 \times 10^{-3}$
2	0.0980	0.187	0.999	$2.10 \times 10^{-3}$
3	0.0497	0.0800	1.00	$4.43 \times 10^{-4}$
4	0.0458	0.102	1.00	$9.04 \times 10^{-4}$
5	0.0425	0.0625	1.00	$1.10 \times 10^{-3}$
6	0.0435	0.0388	1.00	$1.00 \times 10^{-3}$
7	0.0156	0.0675	0.998	$2.00 \times 10^{-3}$

TAB. 5.4 – Interpolation quadratique pour les sept premiers modes de la table initialement plate.

coefficients heuristiques  $k_0$ ,  $k_1$  et  $k_2$  calculés pour divers bombés initiaux. Tout d'abord, on remarque que la valeur de  $k_0$  est toujours très proche de 1, ce qui valide la qualité du modèle. Il apparaît clairement que le terme quadratique  $k_2$  n'est pas négligeable quelque soit le bombé initial. Le premier mode semble particulièrement affecté par  $k_2$ . La figure 5.14 montre les valeurs des coefficients  $k_1$  et  $k_2$  pour plusieurs bombés, pour le premier

<sup>1</sup>l'erreur max est définie comme la différence relative maximale entre les points numériques et la fonction d'interpolation

Mode	$k_2$	$k_1$	$k_0$	erreur max
1	0.365	-0.293	0.994	$8.10 \times 10^{-3}$
2	0.150	-0.0410	1.00	$2.86 \times 10^{-4}$
3	0.0627	-0.0476	1.00	$5.47 \times 10^{-4}$
4	0.0658	-0.00260	1.00	$3.30 \times 10^{-4}$
5	0.0616	-0.0525	1.00	$1.87 \times 10^{-4}$
6	0.0586	-0.0647	1.00	$4.16 \times 10^{-4}$
7	0.0432	-0.0287	1.00	$3.65 \times 10^{-4}$

TAB. 5.5 – Interpolation quadratique pour les sept premiers modes de la table avec un bombé valant l'épaisseur de la plaque.

Mode	$k_2$	$k_1$	$k_0$	erreur max
1	0.254	-0.766	1.00	$2.90 \times 10^{-3}$
2	0.136	-0.320	1.00	$1.07 \times 10^{-4}$
3	0.0640	-0.179	1.00	$1.73 \times 10^{-4}$
4	0.0594	-0.128	1.00	$2.04 \times 10^{-4}$
5	0.0519	-0.171	1.00	$7.78 \times 10^{-4}$
6	0.0606	-0.183	1.00	$5.37 \times 10^{-4}$
7	0.0461	-0.130	1.00	$4.80 \times 10^{-5}$

TAB. 5.6 – Interpolation quadratique pour les sept premiers modes de la table avec un bombé valant deux fois l'épaisseur de la plaque.

Mode	$k_2$	$k_1$	$k_0$	erreur max
1	0.0277	-0.466	1.00	$7.47 \times 10^{-5}$
2	0.0559	-0.377	1.00	$7.52 \times 10^{-5}$
3	0.0203	-0.186	1.00	$1.25 \times 10^{-4}$
4	0.0219	-0.154	1.00	$1.41 \times 10^{-4}$
5	0.00820	-0.173	1.00	$1.67 \times 10^{-4}$
6	0.0220	-0.187	1.00	$2.47 \times 10^{-4}$
7	0.0195	-0.145	1.00	$6.63 \times 10^{-5}$

TAB. 5.7 – Interpolation quadratique pour les sept premiers modes de la table avec un bombé valant trois fois l'épaisseur de la plaque.

mode de vibration. Il apparaît un maximum dans  $k_2$  pour un bombé proche de l'épaisseur et un minimum (maximum en valeur absolu) de  $k_1$  pour un bombé de deux fois l'épaisseur. Mais il n'apparaît pas de relation polynomiale simple entre le bombé et ces coefficients.

### 5.3.3 Calcul de mobilité

#### 5.3.3.1 La question de la dissipation

Nous n'avons pas traité jusque là de l'amortissement. Pourtant, sa caractérisation est essentielle pour la table d'harmonie, qui agit comme un filtre sur les vibrations des cordes. On le décrira par la suite par un facteur d'amortissement, qui a pour origine des

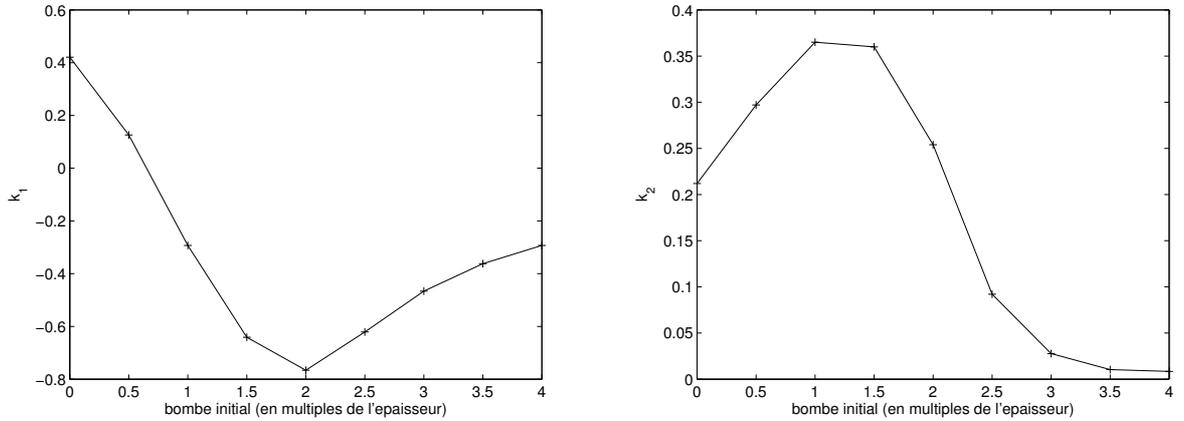


FIG. 5.14 – Effets du bombé sur les coefficients linéaire  $k_1$  et quadratique  $k_2$ .

sources physiques variées. Pour le cas des plaques, ces phénomènes dissipatifs sont décrits précisément par C. Lambourg [46]. La première catégorie, les pertes internes, est constituée de la dissipation intrinsèque au matériau, décrite par un modèle viscoélastique, et par des pertes thermoélastiques, dues au couplage entre ondes élastiques et ondes thermiques. La deuxième catégorie, les pertes par couplage externe, est constituée du couplage plaque-air (transmission acoustique et friction fluide), et la transmission par couplage mécanique aux supports de la plaque. Ces différentes sources de dissipation sont plus ou moins importantes selon le matériau utilisé ou le type de support employé.

Ces catégories sont aussi applicables à la table du piano. Mais la table d'harmonie est une structure plus complexe. Les différents assemblages dont elle est issue sont autant de sources de dissipation. Par exemple, les mesures de K. Wogram [99] et H. A. Conklin [16] montrent que la charge des cordes a certainement un effet non négligeable sur l'amortissement de la table. Malheureusement, ces auteurs ne quantifient pas leur résultat et conclure ici serait prématuré. On peut toutefois émettre l'hypothèse que le contact entre les cordes et les chevalets, fait avec l'aide d'agrafes, est une autre source de dissipation par couplage mécanique. Face à cette question non résolue actuellement, nous avons choisi d'introduire dans notre modèle un amortissement indépendant du bombé et de la charge des cordes. La complexité de la table d'harmonie et les méthodes de mesures par la mobilité au chevalet ont orienté les auteurs de [85] et [6] à évaluer directement le facteur d'amortissement, sans se préoccuper de ses sources physiques. Cette démarche conduit à obtenir un facteur d'amortissement visqueux modal  $\xi_m$  défini par la théorie du filtrage linéaire par :

$$\xi_m = \frac{\omega_{2m} - \omega_{1m}}{\omega_m} \quad (5.6)$$

où  $\omega_m$  est la pulsation propre du mode,  $\omega_{1m}$  et  $\omega_{2m}$  les pulsations où la mobilité vaut -3dB de celle à  $\omega_m$ . Bien que très efficace, cette méthode donne des résultats approchés pouvant s'avérer erronés, en particulier à haute fréquence. Suzuki trouve ainsi un facteur d'amortissement de 0.064 pour le premier mode, et environ 0.02 ou 0.03 pour les autres modes [85]. Pour leur part, Berthaut et al.[6] mesurent des valeurs sensiblement plus faibles, mais leur mesures sont effectuées sur une table libre et sans chevalet.

### 5.3.3.2 Effets de la charge et du bombé sur la mobilité

A l'aide des mesures de H. Suzuki [85], nous avons introduit dans notre modèle un amortissement modal de 0.064 pour le premier mode et de 0.02 pour les autres modes. La figure 5.15 montre l'effet de la charge transversale sur la mobilité en un point arbitrairement choisi, proche du milieu du grand chevalet. On remarque une augmentation de toutes les fréquences des pics. Mais l'amplitude des pics est aussi modifiée, en particulier le deuxième pic est réduit d'environ 21dB. Ceci s'explique par la modification des déformées modales, et donc un déplacement des ventres nodaux pouvant amplifier ou réduire la mobilité de ce mode, selon la position du point de mesure. Ces tendances sont spécifiques à une table

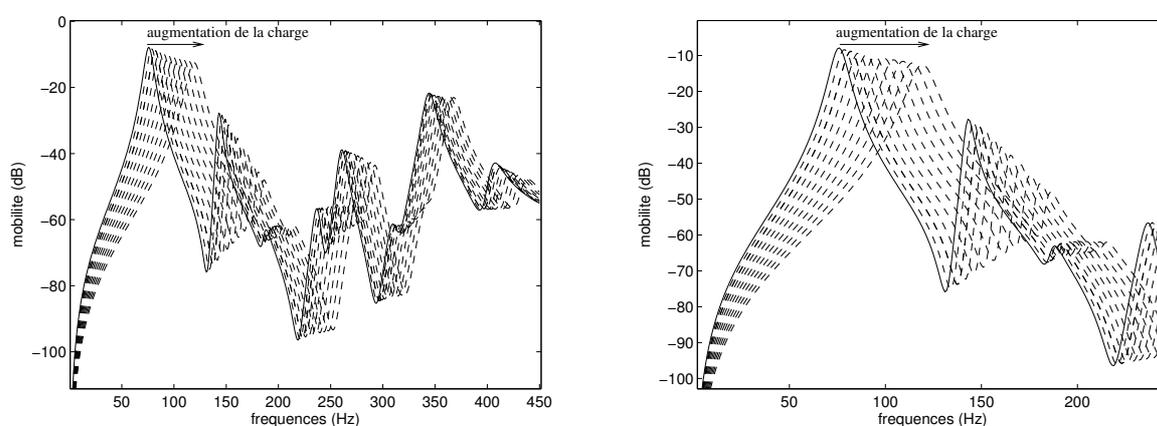


FIG. 5.15 – Mobilités en un point proche du milieu du grand chevalet, d'une table initialement plate subissant une charge transversale et zoom. Les fréquences des pics augmentent avec la charge transversale.

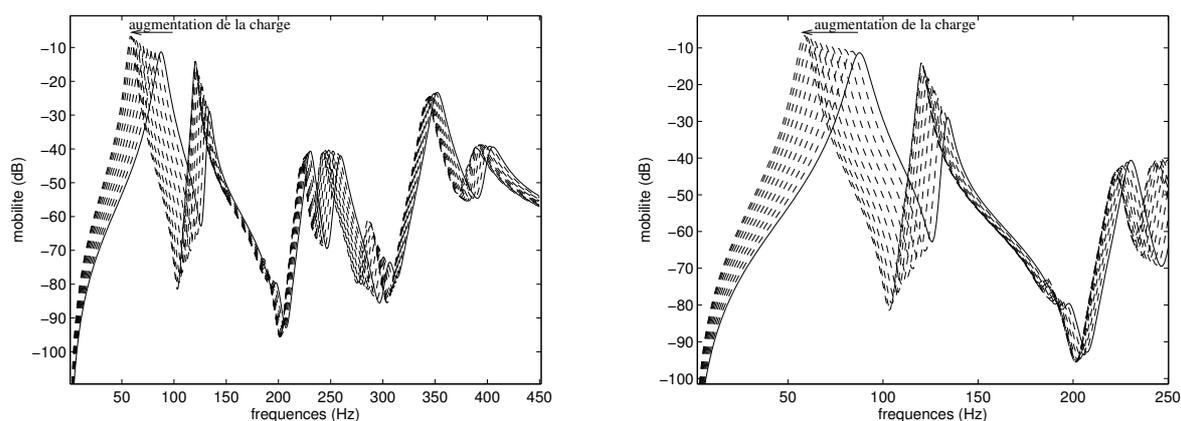


FIG. 5.16 – Mobilités en un point proche du milieu du grand chevalet, d'une table avec un bombé initial de deux fois l'épaisseur, subissant une charge transversale et zoom. Les fréquences des pics diminuent avec la charge transversale.

sans bombé initial. Pour une table bombée les comportements peuvent être plus complexes

ou même être complètement inversés, comme le montre la figure 5.16.

### 5.3.4 Effets statiques : un intérêt pour la conservation-restauration

Bien que l'étude des vibrations soit essentielle, connaître les précontraintes a un autre intérêt. Les comportements statiques de la table soumise à la charge des cordes pose des problèmes importants (voir Frelat et Mamou-Mani [26]). Gérer les risques de flambage, ou encore de fissures, fait partie du travail quotidien des fabricants et des restaurateurs d'instruments. L'étude statique de la table d'harmonie donne des informations sur ces questions.

### 5.3.5 Forme de la table en état de jeu

La charge transversale fait subir à la table des déplacements statiques plus ou moins importants selon le bombé initial. Ceci a pour conséquence des changements de forme de la table non-négligeables, présentés figure 5.17. Le cas où le bombé initial vaut l'épaisseur de la plaque présente un ambitus important de déplacements générés. Il montre ainsi l'émergence progressive d'une forme en « vague », bombée pour les médiums et aigus et creusée dans les graves. Pour des déplacements encore plus grands, la table finit même par perdre son bombé. Le minimum observé sur la première fréquence propre correspond à la forme précédant l'apparition de la « vague ».

Ces premiers résultats statiques devront être complétés dans l'avenir par une hiérarchisation des énergies de flexion et d'extension ([54; 55]), qui permettrait de mieux décrire l'état interne de la table, et ainsi de simplifier les modèles dans certains cas.

## 5.4 Conclusion : Existe-t-il un réglage optimal ?

Il est maintenant possible d'apporter un début de réponse à la question d'un hypothétique réglage optimal. Cette question doit tout d'abord être précisée. Nous n'avons traité jusqu'à présent que des questions vibratoires, en oubliant le rayonnement, l'acoustique ou encore la qualité sonore. Nous ne sommes donc en mesure de répondre qu'en terme d'un « optimum mécanique ». En effet, ce chapitre a montré une complémentarité mécanique entre le bombé et la mise en charge des fabricants. Lorsque la table est initialement plate, la charge des cordes induit une augmentation des fréquences propres de la table, c'est-à-dire de la rigidité, ce qui implique des risques de dégradation de la structure. Dans le cas où un bombé initial est donné, l'évolution des fréquences fait apparaître un minimum (issu d'une loi quadratique), c'est-à-dire une situation de rigidité minimale (ou encore de compression maximale), pour laquelle la tension induite par la forme initiale et entièrement compensée par la charge des cordes, ou, dit autrement, la charge des cordes est parfaitement compensée par la mise en forme initiale. C'est donc le cas C de la figure 5.17 qui serait l'optimum mécanique. Par ailleurs, les facteurs de piano disent souvent que c'est lorsque la table est la plus plate possible que l'instrument est le meilleur, ce qui va dans le sens de nos conclusions.

Le calcul numérique de ce chapitre prenait une grande part de la complexité des tables d'harmonie ainsi que les précontraintes de fabrication. Il a ainsi donné des formulations et des résultats utilisables par l'ingénieur et le technicien familiers de ces outils de calcul, que l'on peut retrouver dans Mamou-Mani et al. [52]. Le modèle doit être amélioré, en

---

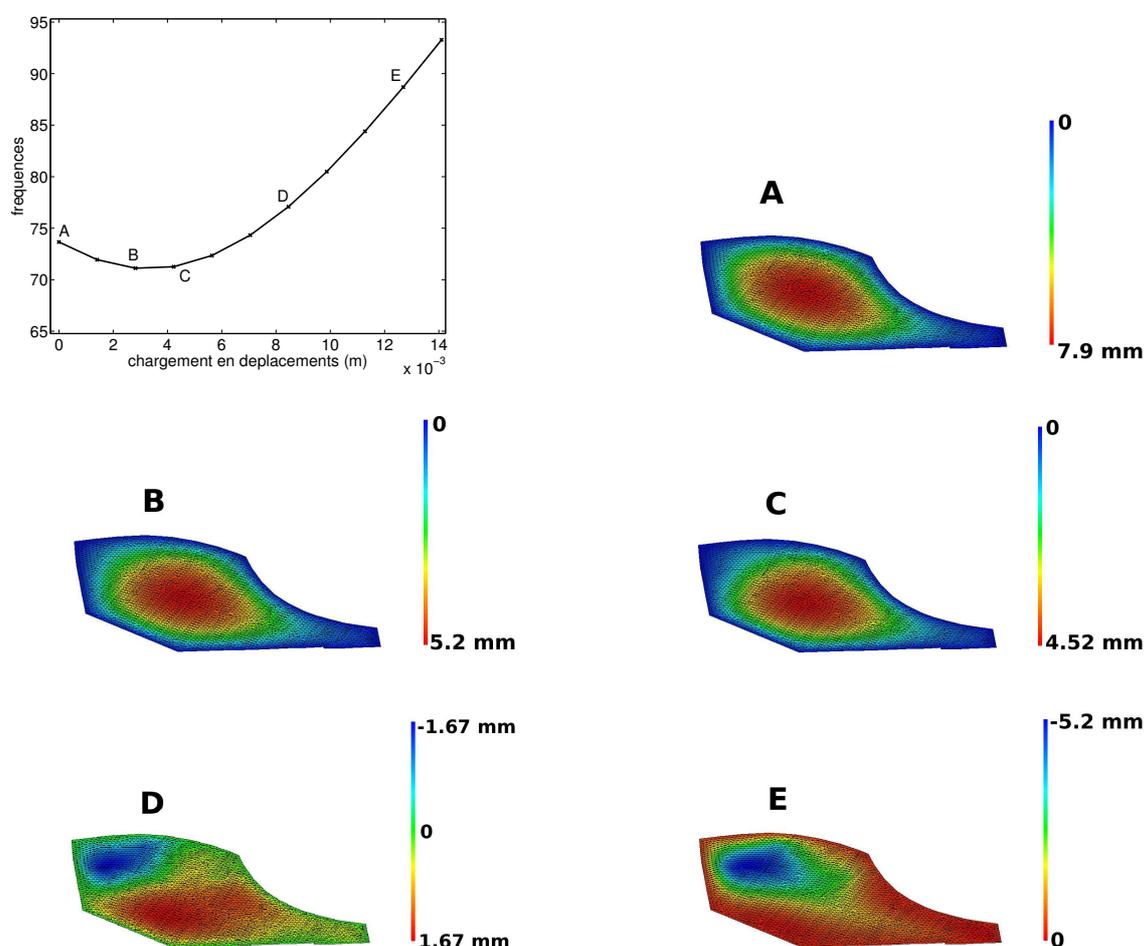


FIG. 5.17 – Changements progressifs de forme de table en relation avec l'évolution de la première fréquence propre pour un bombé valant l'épaisseur de la plaque.

introduisant une composante horizontale dans le chargement des cordes, qui n'est pas simplement vertical dans la réalité. Ces résultats posent aussi certaines questions théoriques, concernant la nature des phénomènes physiques mis en jeu par ces procédés. Le chapitre suivant les exprimera en réduisant le problème à des systèmes simples. Ces systèmes à petit nombre de degrés de liberté permettent de hiérarchiser les propriétés physiques à l'origine des phénomènes observés sur la simulation précédente. Plus précisément, nous cherchons maintenant à retrouver l'évolution quadratique du carré des pulsations propres présentée dans le présent chapitre.

## Chapitre 6

# Vibrations linéaires de systèmes précontraints

Le chapitre précédent était consacré à une étude numérique du piano qui prenait en compte des éléments du savoir-faire des fabricants. Le calcul numérique nous a permis d'obtenir des résultats qualitatifs et quantitatifs sur une structure s'approchant fortement de la réalité.

Mais la table d'harmonie du piano est une structure complexe. Ainsi, les résultats que nous avons établis lui sont propres et ne sont pas généralisables à tous les instruments subissant une charge due aux cordes. Le chapitre qui suit a pour objectif d'exhiber simplement les effets des précontraintes sur les modes de vibration. Pour cela, nous avons choisi des systèmes très simples, mais qui possèdent un équivalent de bombé initial et une charge transverse.

### 6.1 Éléments fondamentaux pour l'étude

#### 6.1.1 Théorie des vibrations

La théorie des vibrations actuelle a été formulée par Lord Rayleigh, dans *The Theory of Sound* [72]. La science des sons, *l'Acoustique*, regroupait alors la production, la propagation et la perception des sons. Il est donc logique que la mécanique des vibrations y trouve ses origines et son moteur. Rayleigh n'est évidemment pas le premier à avoir traité la question des vibrations. On attribue à Pythagore (VI<sup>e</sup> siècle avant J.C.) la découverte de relations entre hauteur de note et longueur de corde. Toutefois, la relation entre la hauteur d'une note et la fréquence de vibration du corps n'était probablement pas connue. Dans son *Discours concernant deux sciences nouvelles*, publié en 1638, Galileo Galilei (1564-1642) traite des vibrations. Il émet l'opinion que le nombre de vibrations par unité temporelle d'une corde vibrante est lié à la hauteur de la note. Il avait compris de plus que cette fréquence dépend de la longueur, de la tension et de la densité de la corde. Par l'analogie entre les vibrations de corde et les oscillations d'un pendule, il a expliqué le phénomène de vibrations sympathiques. Dans son *Harmonie Universelle*, Marin Mersenne a fait à la même époque des découvertes similaires. Bien d'autres auteurs comme R. Hooke (1635-1703), Taylor (1685-1731), D. Bernoulli (1700-1782) ou encore L. Euler (1707-1783) ont travaillé sur la corde vibrante. Mais c'est sans doute J. Sauveur (1653-1716) qui à cette époque a proposé les concepts les plus utilisés aujourd'hui. Ses notions de *noeud* et de *ventre* de vibration sont toujours employées pour caractériser les déformées modales. Il

---

introduisit aussi les termes *fondamentale* et *harmoniques* pour caractériser les vibrations complexes. On doit à D. Bernoulli la démonstration de cette propriété des vibrations complexes en 1755, et ainsi l'introduction du *principe de superposition*. C'est finalement J. Fourier (1768-1830) qui développa le formalisme de cette superposition.

Lagrange (1736-1813) a résolu le problème de la corde vibrante en décomposant la corde en particules de même masses également espacées, puis en passant à la limite. E. Chladni (1756-1824) a montré expérimentalement l'existence des lignes nodales en saupoudrant de sable des plaques, et S. Germain (1776-1831) puis G. R. Kirchhoff (1824-1887) finiront par le modéliser par une équation différentielle du quatrième ordre en espace.

L'apport de Rayleigh pour les vibrations a été tout d'abord la généralisation des résultats précédents. De plus, il introduisit une méthode de calcul approché des fréquences de vibrations dans le cas où la solution directe des équations différentielles du mouvement est impossible. Pour cela, il utilisa une méthode énergétique, qui sera plus tard généralisée par W. Ritz et que l'on nomme *méthode de Rayleigh-Ritz*. Celle-ci sera la base des méthodes matricielles (comme la méthode des éléments finis), qui ont bouleversé le paysage de l'analyse de la dynamique des structures depuis l'apparition des moyens informatiques vers 1960.

### 6.1.2 Mécanique non-linéaire

La mécanique non-linéaire a débuté avec les problèmes d'instabilité élastique. Euler a résolu le problème du flambement des structures élancées sous chargement axial en 1744, en écrivant les équations non-linéaires d'une courbe élastique. En 1859, G. R. Kirchhoff a décrit le comportement non-linéaire de poutres inextensibles dans la limite où les déformations sont assez faibles pour que l'élasticité hookéenne reste valable. Ces modèles inextensibles (*elastica*) ont fait leurs preuves dans de nombreuses situations. Par exemple, P. Patricio et al. [67] ont modélisé parfaitement la stabilité des arches très courbées de l'expérience de A. B. Pippard [68]. A. Boudaoud et al. [9] ont aussi appliqués ce type de modèles pour des plaques chargées transversalement. Mais les modèles inextensibles s'avèrent insuffisants pour les arches de courbure faible (voir S. Timoshenko [89]).

### 6.1.3 Cas classiques de systèmes précontraints

Le cas le plus connu de système précontraint est la corde vibrante, infiniment souple, entre appuis fixes. Sous l'hypothèse de mouvement transversal plan, la déformation axiale d'une corde tendue s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (6.1)$$

où  $w$  est le déplacement transversal. Si l'on néglige l'effet de câble devant la traction considérée constante  $T_0$ , l'énergie additionnelle de déformation est nulle et l'énergie géométrique vaut :

$$V_g = \frac{1}{2} \int_0^l T_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6.2)$$

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{w}^2 dx \quad (6.3)$$

et l'énergie potentielle des forces externes

$$V_{ext} = - \int_0^l p(x, t) w dx \quad (6.4)$$

où  $m$  est la masse linéique et  $p(x, t)$  est la charge transversale. Le principe de Hamilton s'écrit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l \left( m\dot{w}^2 - T_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + p(x, t)w \right) dx = 0 \quad (6.5)$$

qui donne après dérivation l'équation du mouvement :

$$m\ddot{w} - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p(x, t) = 0 \quad (6.6)$$

La résolution de cette équation, dans le cas harmonique, pour une corde tendue en appuis fixes donne alors les pulsations propres :

$$\omega_k = k\pi \sqrt{\frac{T_0}{ml^2}} \quad (6.7)$$

et les déformées modales :

$$w_k(x) = a \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (6.8)$$

La relation entre  $\omega^2$  et la traction constante  $T_0$  est ainsi linéaire. Pour les poutres en

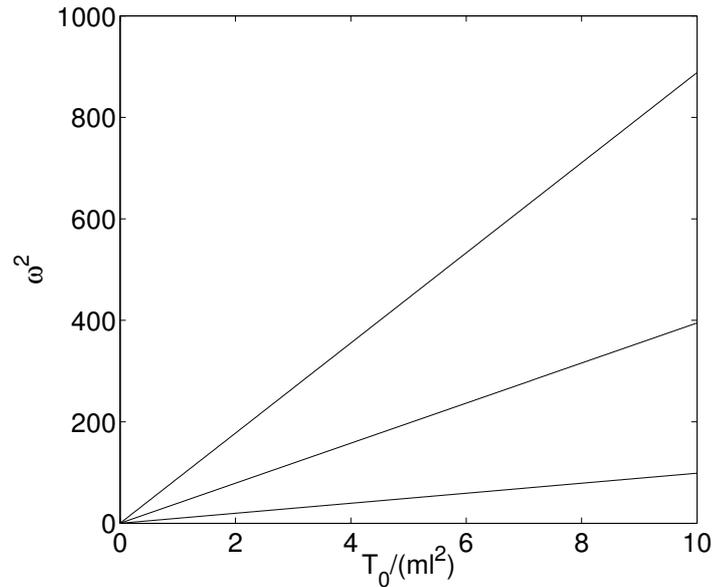


FIG. 6.1 – Exemple d'évolution du carré des trois premières pulsations d'une corde avec la précontrainte.

appuis, on trouve de la même manière, l'équation du mouvement :

$$m\ddot{w} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (6.9)$$

où  $E$  est le module d'Young,  $I$  le moment d'inertie et  $N_0$  la précontrainte constante axiale de la poutre. On trouve ainsi les pulsations propres :

$$\omega_n^2 = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 \left[ \frac{EI}{m} \left( 1 - \frac{N_0}{N_{cr,n}} \right) \right] \quad (6.10)$$

où

$$N_{cr,n} = -\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \quad (6.11)$$

est la charge critique de flambage, pour laquelle  $\omega_n$  s'annule. Le cas de la poutre ajoute à celui de la corde le phénomène de flambage, dû à la contrainte de compression. Mais les comportements sont semblables, étant donné que la tension  $T_0$  de la corde et la précontrainte axiale  $N_0$  de la poutre, toutes deux sources de rigidité géométrique, sont considérées constantes dans ces structures. D'autre part, les changements géométriques sont négligés.

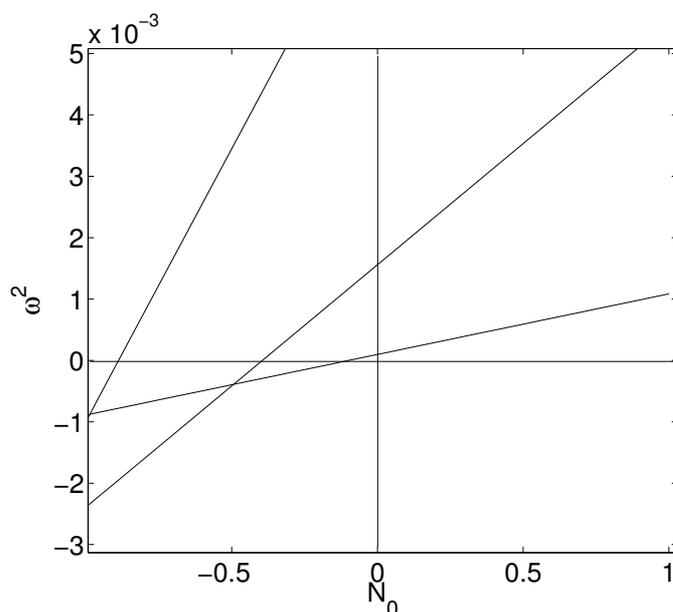


FIG. 6.2 – Exemple d'évolution du carré des trois premières pulsations d'une poutre avec la précontrainte.

Ces raisons impliquent que les carrés des pulsations propres évoluent linéairement avec les précontraintes. Ces résultats ne sont pas en accord qualitatif avec le calcul numérique sur la table de piano, qui montrait une évolution quadratique. Nous proposons d'autres systèmes qui permettent de retrouver les propriétés observées sur le piano.

## 6.2 Systèmes précontraints avec changements géométriques importants

### 6.2.1 Le portique à un degré de liberté

La prise en compte des changements géométriques dûs au chargement est décrite par un phénomène non-linéaire appelé « grands déplacements ». Le portique constitué de deux barres avec une masse centrale en est un bon exemple, dont des formules analytiques sont aisées à développer. C'est pour cet intérêt qualitatif qu'il a été utilisé par exemple par Baguet et Cochelin [4] pour décrire son comportement statique et Thomas et al. [88] en dynamique non-linéaire. On commence ici par décrire le système (voir la thèse d'O. Thomas [86] pour une description détaillée).

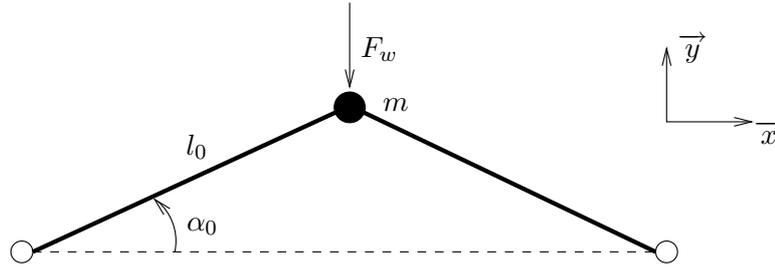


FIG. 6.3 – Système de deux barres et une masse ponctuelle.

Soit le système constitué de deux barres de section  $A_0$ , de longueur  $l_0$  et inclinées d'un angle  $\alpha_0$  avec le bâti dans la configuration de référence (au repos), et reliées par une masse centrale ponctuelle  $m$ . Toutes les liaisons sont supposées des pivots parfaits. On se limitera dans la suite au cas où la masse ne se déplace que suivant l'axe vertical  $\vec{y}$ , déplacement noté  $w$ , le système reste donc toujours symétrique (voir [4] pour la prise en compte du déplacement selon  $\vec{x}$ ). Enfin le poids des barres est négligé.

Dans leur configuration actuelle, les barres ont une longueur  $l$  et forme un angle  $\alpha$  avec le bâti. La déformation normale de chaque barre s'écrit :

$$e_n = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \sin \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 \quad (6.12)$$

L'effort appliqué à chaque barre vaut ainsi :

$$\vec{N} = \frac{l}{l_0} N_0 \vec{n} = EA_0 \frac{l}{l_0} \vec{n} \quad (6.13)$$

et la force totale  $\vec{F}_w$  vaut la somme des projections sur la verticale des efforts normaux  $\vec{N}$  des barres :

$$\vec{F}_w = 2N \sin \alpha \vec{y} = 2EA_0 \left( \sin^2 \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \frac{3}{2} \sin \alpha_0 \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \right) \vec{y} \quad (6.14)$$

La raideur du système s'écrit alors :

$$K = \frac{\|\vec{F}_w\|}{w} = 2ES_0 \left[ \frac{\sin^2 \alpha_0}{l_0} + \frac{3 \sin \alpha_0}{2l_0^2} w + \frac{1}{2l_0^3} w^2 \right] \quad (6.15)$$

On identifie ainsi trois termes différents caractérisant les différentes raideurs exprimées dans la théorie des précontraintes.

- le terme constant : raideur dite *élastique naturelle* et notée  $K_{el}$ , dépendant uniquement de l'état au repos  $(l_0, \alpha_0)$ .
- le terme linéaire en  $w$  : raideur dite *géométrique linéaire* et notée  $K_{glin}$ , introduite par le déplacement vertical  $w$  amenant à l'état actuel. Ce terme dépend aussi de l'état au repos  $(l_0, \alpha_0)$ . On notera que, même si cette raideur est dite « linéaire », elle est due à la prise en compte d'un terme du second ordre dans la relation force-déplacement.
- le terme quadratique en  $w$  : raideur dite *géométrique quadratique* et notée  $K_{gcar}$ , indépendant de l'angle initial  $\alpha_0$ .

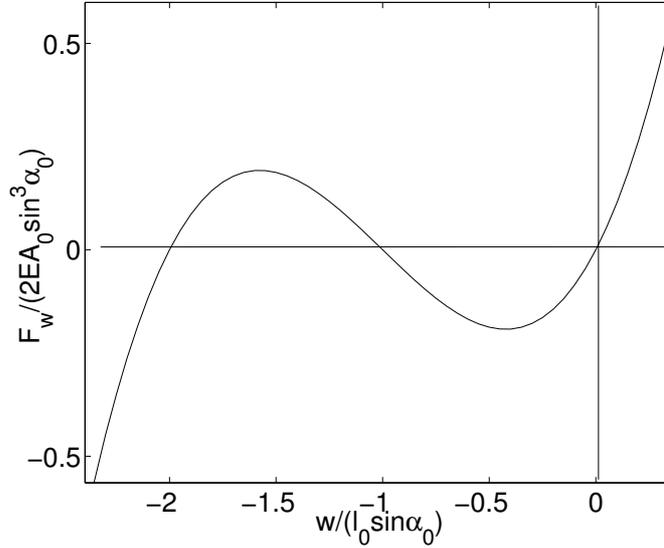


FIG. 6.4 – Relation entre la force et le déplacement du portique en grands déplacements.

Bien que très simple, ce système met donc en jeu les différentes raideurs existantes en grands déplacements : la raideur élastique naturelle et la raideur géométrique, se décomposant elle-même en une partie linéaire et une partie quadratique. On notera tout de même qu'il ne possède pas de raideur en flexion, ce qui limite fortement l'extrapolation de ces propriétés aux systèmes continus, comme des poutres ou des plaques.

### 6.2.1.1 Fréquence de vibration en présence d'une précontrainte

Une fois la raideur connue, il est aisé de calculer la fréquence de vibration du portique symétrique. En effet, l'équation aux valeurs propres se réduit à

$$\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{K_{el} + K_{glin} + K_{gcar}}{m} = \frac{2ES_0 \sin^2 \alpha_0}{l_0} \left[ 1 + 3 \frac{w}{l_0 \sin \alpha_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{w}{l_0 \sin \alpha_0} \right)^2 \right] \quad (6.16)$$

Et on obtient :

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + 3 \frac{w}{l_0 \sin \alpha_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{w}{l_0 \sin \alpha_0} \right)^2 \quad (6.17)$$

où  $\omega_0^2 = \frac{2ES_0 \sin^2 \alpha_0}{l_0}$  la pulsation propre naturelle du portique.

On observe ainsi des zones de comportements différents, représentées figure 6.5 :

1.  $-\frac{w}{l_0 \sin \alpha_0} < 0$ . La traction dans les barres augmente la fréquence.
2.  $0 < -\frac{w}{l_0 \sin \alpha_0} < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Les barres se compriment, la fréquence diminue.
3.  $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < -\frac{w}{l_0 \sin \alpha_0} < 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ .  $\omega^2 < 0$ , le système est donc instable. C'est le phénomène de claquage. Un minimum est observé pour la géométrie plate.
4.  $-\frac{w}{l_0 \sin \alpha_0} > 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Les barres sont de nouveau en zone stable en traction, elles se sont retournées (l'angle actuel  $\alpha < 0$ ). Les fréquences augmentent.

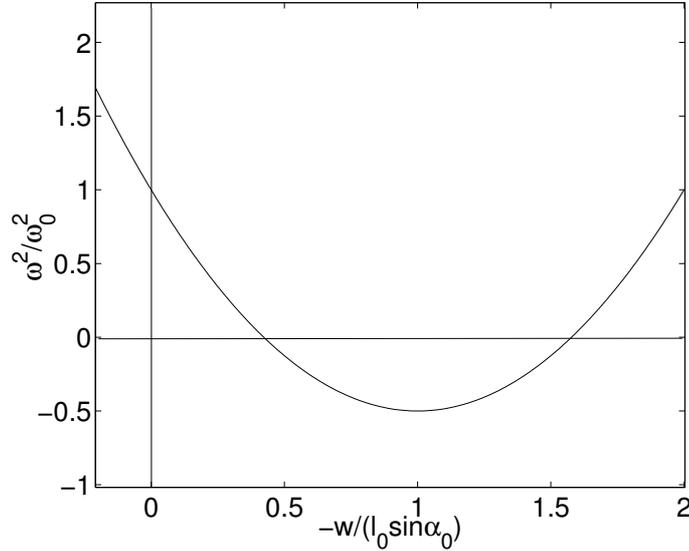


FIG. 6.5 – Evolution de la pulsation avec la précontrainte.

### 6.2.1.2 Remarque sur la précontrainte linéarisée

La forme exacte de la relation entre la pulsation et le déplacement du portique est donnée par l'équation 6.17. Lorsque le déplacement  $\frac{w}{l_0 \sin \alpha_0}$  est assez faible, on peut approcher la pulsation par la fonction affine :  $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + 3 \frac{w}{l_0 \sin \alpha_0}$ , correspondant à l'approximation de rigidité géométrique linéarisée. Mais la figure 6.6 montre que la validité de cette approximation est faible. En particulier, elle sous-évalue significativement le claquage (point limite caractérisé par  $\omega = 0$ ).

### 6.2.1.3 Comparaison avec le piano : conclusion provisoire

Ces comportements ont une allure similaire à ceux du modèle de piano. Toutefois le phénomène d'instabilité de type claquage est nouveau. Il est caractérisé par les coefficients :

$$k_0 = 1, \quad k_1 = \frac{3}{l_0 \sin \alpha_0}, \quad k_2 = \frac{3}{2(l_0 \sin \alpha_0)^2} \quad (6.18)$$

Ces coefficients sont bien fonctions de la géométrie initiale  $(l_0, \alpha_0)$  du portique mais en dépendent de manière plus simple que dans le cas du piano. Le portique ne décrit donc pas qualitativement de façon satisfaisante l'évolution des coefficients non-linéaires. Ces coefficients semblent donc être déterminés uniquement par le calcul sur la structure réelle. Toutefois, la forme  $(\omega/\omega_0)^2 = k_0 + k_1 w + k_2 w^2$  reste modélisable par ce système simple.

Les modes de vibration d'une table de piano précontraint peuvent donc être considérés comme autant de portiques chargés en grands déplacements. Mais l'analogie ne prend pas en compte les couplages potentiels entre chaque mode. Cet effet est pris en compte dans la suite à l'aide d'une poutre flambée chargée transversalement.

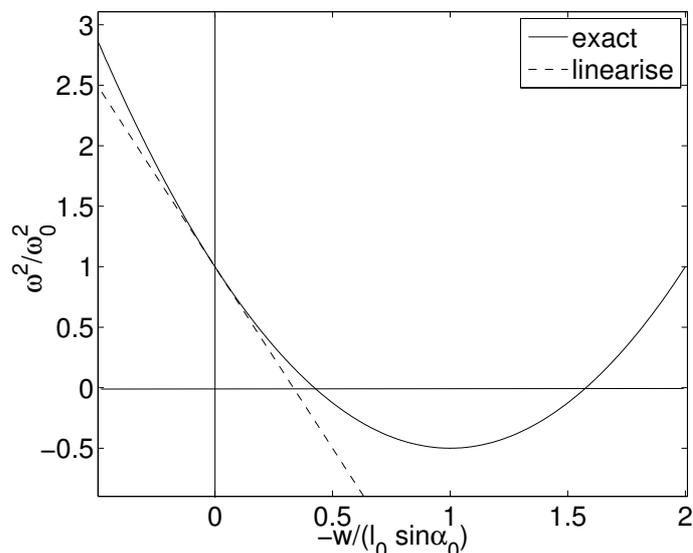


FIG. 6.6 – Comparaison entre le portique non-linéaire et linéarisé.

## 6.2.2 La poutre flambée chargée transversalement

La poutre flambée chargée transversalement est un bon exemple de système continu soumis à des contraintes initiales provenant de l'association de deux chargements : un chargement axial produisant le flambement, et une charge transversale. Ces deux sources de contraintes initiales serviront à modéliser respectivement le « bombé initial » et la « charge des cordes » du piano. L'évolution des modes de vibration avec ces deux chargements est présentée dans la suite sous la forme de deux parties. La première étape consiste à déterminer les modes propres de vibration d'une poutre flambée. Ces modes serviront de base modale. La deuxième étape consiste à appliquer une charge statique transversale au milieu de la poutre flambée. Pour cela, on détermine les propriétés non-linéaires géométriques, projetées sur la base modale. Puis on applique la charge statique sur un modèle réduit à deux degrés de liberté.

### 6.2.2.1 Résultats de la littérature

Les vibrations des poutres flambées ont été étudiées de nombreuses fois dans les cinquante dernières années. Nayfeh, Kreider and Anderson [62] et Kreider [43] ont calculé analytiquement les modes propres de vibration autour d'une position post-flambée de la poutre, pour des conditions aux limites encasté-encasté. Ces résultats s'accordent parfaitement avec les expériences.

Les vibrations en grands déplacements des poutres flambées ont été abordées par Eisley [21], Tseng et Dugundgi [92] ou encore par Mettler [59]. Emam and Nayfeh [22] donnent l'expression des coefficients quadratiques et cubiques sur la base des modes propres de vibration de la poutre (décomposition de Galerkin).

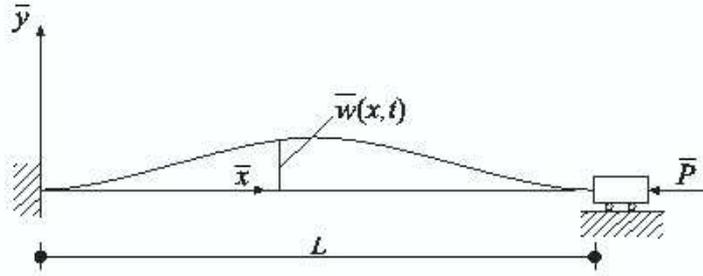


FIG. 6.7 – Schéma d'une poutre encastrée-encastree soumise à une charge axiale.

### 6.2.2.2 Mise en équation

Soit une poutre sous chargement axial  $\bar{P}$  présentée figure 6.7. Suivant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, la déformation axiale  $e$  de la poutre dont le mouvement est supposé plan, s'écrit :

$$e = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \quad (6.19)$$

où  $\bar{u}$  et  $\bar{w}$  sont respectivement le déplacement axial et transversal de la poutre. Dans l'hypothèse de rotations modérées, où  $\bar{u} = O(\bar{w}^2)$ , la déformation axiale devient :

$$e = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \quad (6.20)$$

Ainsi,  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = e - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2$ . Par intégration sur  $x$ , on trouve le déplacement axial :

$$\bar{u} = xe - \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 dx + cste \quad (6.21)$$

En écrivant les conditions aux limites sur  $u$  en faisant intervenir le chargement axial  $\bar{P}$  (considéré positif dans le sens de la compression de la poutre) :

$$\bar{u}(0) = 0 \text{ et } \bar{u}(l) = -l\bar{P} \quad (6.22)$$

on réécrit  $e$  :

$$e = -\bar{P} + \frac{1}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 dx \quad (6.23)$$

L'équation des vibrations non-linéaires libres d'une poutre d'Euler-Bernoulli sans amortissement s'écrit alors, d'après [63; 62] :

$$m \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + EI \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \left[ \bar{P} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad (6.24)$$

où  $m$  est la masse linéique,  $l$  est la longueur,  $E$  est le module d'Young,  $A$  est la section et  $I$  est le moment d'inertie de la poutre. Par souci de simplicité, on peut réécrire cette équation sous sa forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[ P - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (6.25)$$

où

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad w = \frac{\bar{w}}{r}, \quad t = \bar{t} \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}, \quad P = \frac{\bar{P}l^2}{EI} \quad (6.26)$$

où  $r = \sqrt{I/A}$  est le rayon de giration.

### 6.2.2.3 Rappel concernant le flambage d'Euler

La géométrie post-flambage se calcule en résolvant le problème statique obtenu en négligeant le terme temporel :

$$\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \lambda \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = 0 \quad (6.27)$$

où

$$\lambda = P - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6.28)$$

et les conditions aux limites d'encastrement s'écrivent :

$$w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = 1 \quad (6.29)$$

Le premier mode de flambage est obtenu pour une charge critique  $\lambda_c = 4\pi^2$ . Tant que  $\lambda < \lambda_c$ , la poutre reste droite. Nous avons déjà étudié les fréquences propres dans ce cas dans un paragraphe précédent. Si  $\lambda > \lambda_c$ , le déplacement statique prend une forme s'exprimant à partir du mode de flambage  $\varphi_1$  par :

$$w_s = b\varphi_1(x) = \frac{1}{2}b(1 - \cos(2\pi x)) \text{ où } b = \frac{4(P - \lambda_c)}{\pi^2} \quad (6.30)$$

où  $\varphi_1$  est normalisé tel que  $\varphi_1(0.5) = 1$ .

### 6.2.2.4 Vibrations linéaires autour de l'état précontraint

L'équation dynamique autour de cet état initial post-flambé s'écrit :

$$w(x, t) = \frac{1}{2}b(1 - \cos(2\pi x)) + v(x, t) \quad (6.31)$$

où  $v(x, t)$  est le déplacement transverse dynamique complémentaire. L'équation (6.25) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \lambda_c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2b^2\pi^3 \cos(2\pi x) \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \sin(2\pi x) dx = \\ & b\pi^2 \cos(2\pi x) \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + b\pi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \sin(2\pi x) dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (6.32)$$

avec les conditions aux limites :

$$v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \quad (6.33)$$

Après linéarisation autour de la configuration postflambée, l'équation 6.32 devient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \lambda_c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2b^2\pi^3 \cos(2\pi x) \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \sin(2\pi x) dx = 0 \quad (6.34)$$

Si l'on pose  $v(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t}$ ,  $\phi(x)$  doit vérifier :

$$\phi'''' + \lambda_c \phi'' - 2b^2 \pi^3 \cos(2\pi x) \int_0^1 \phi' \sin(2\pi x) dx - \omega^2 \phi = 0 \quad (6.35)$$

Les solutions de cette équation ont la forme :

$$\phi(x) = c_1 \sin \lambda_1 x + c_2 \cos \lambda_1 x + c_3 \sinh \lambda_2 x + c_4 \cosh \lambda_2 x + c_5 \cos(2\pi x) \quad (6.36)$$

où  $\lambda_1 = (\sqrt{4\pi^4 + \omega^2} + 2\pi^2)^{\frac{1}{2}}$  et  $\lambda_2 = (\sqrt{4\pi^4 + \omega^2} - 2\pi^2)^{\frac{1}{2}}$ . En introduisant l'expression de  $\phi(x)$  dans l'équation (6.34) et dans les quatre conditions aux limites, on obtient un système de cinq équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2 + c_4 + c_5 = 0 \\ c_1 \lambda_1 + c_3 \lambda_2 = 0 \\ c_1 \sin \lambda_1 + c_2 \cos \lambda_1 + c_3 \sinh \lambda_2 + c_4 \cosh \lambda_2 + c_5 = 0 \\ c_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 - c_2 \lambda_1 \sin \lambda_1 + c_3 \lambda_2 \cos \lambda_2 + c_4 \lambda_2 \sinh \lambda_2 = 0 \\ \frac{\lambda_1 (\cos \lambda_1 - 1)}{\lambda_1^2 - 4\pi^2} c_1 - \frac{\lambda_1 \sin \lambda_1}{\lambda_1^2 - 4\pi^2} c_2 + \frac{\lambda_2 (1 - \cosh \lambda_2)}{\lambda_2^2 + 4\pi^2} c_3 - \frac{\lambda_2 \sinh \lambda_2}{\lambda_2^2 + 4\pi^2} c_4 + \frac{\omega^2 - 2b^2 \pi^4}{4b^2 \pi^4} = 0 \end{array} \right. \quad (6.37)$$

dont un calcul de valeurs propres donne les pulsations propres linéaires  $\omega$  (voir [62]) et les déformées modales  $\phi(x)$ .

### 6.2.2.5 Caractéristiques modales

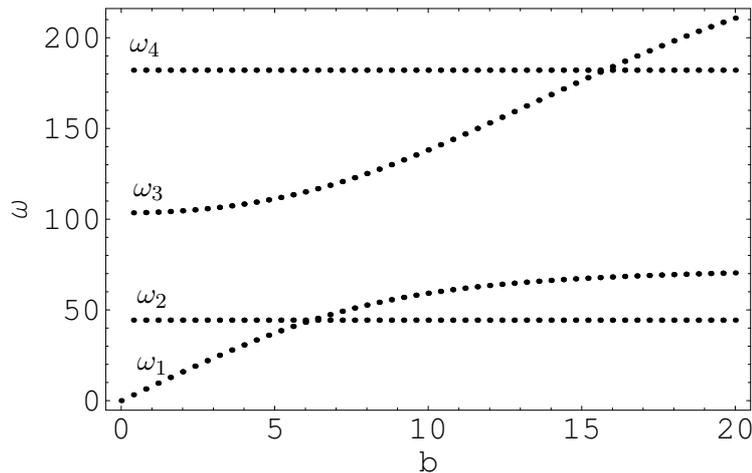


FIG. 6.8 – Evolution des quatre premières fréquences propres d'une poutre flambée avec la charge axiale.

La figure 6.8 montre l'évolution des quatre premières fréquences propres avec le niveau de flambage  $b$ . On remarque que la fréquence du mode 2 et celle du mode 4 ne sont pas modifiées par le flambage, alors que les fréquences des modes 1 et 3 changent fortement. Ceci provient du fait que les cas où  $C_5 = 0$  et  $C_5 \neq 0$  engendrent deux systèmes d'équations différents (voir [62] pour plus de détails). La figure 6.9 montre que la géométrie du mode

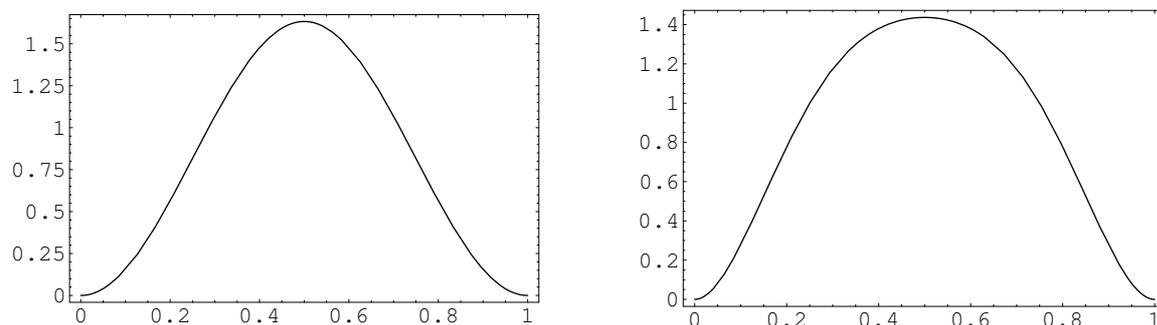


FIG. 6.9 – Déformée du premier mode de vibration pour  $b = 0.1$  (gauche) et  $b = 5$  (droite).

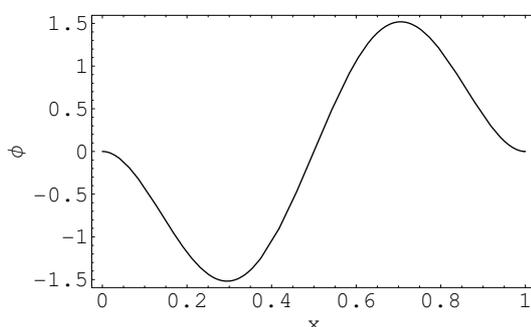


FIG. 6.10 – Déformée du deuxième mode quelque soit la valeur de  $b$ .

1 est fortement modifiée par le niveau de flambage  $b$ , alors que le mode 2 de la figure 6.10 n'est pas modifié. On peut généraliser ce résultat à tous les modes ayant un noeud en  $x = \frac{1}{2}$ . Leur fréquence et leur déformée sont indépendantes du niveau de flambage. En revanche, les autres modes sont fortement altérés par le niveau de flambage, tant pour leur géométrie qui perd ses symétries que par leur fréquence qui augmente non-linéairement. On note que ces propriétés d'évolution des fréquences dépendent des conditions aux limites. Toutefois, Nayfeh et al. [62] montrent que les modes 2 et 4 sont modifiés autant que les autres pour des conditions aux limites d'appui sur un bord et d'encastrement sur l'autre. Ceci s'explique par la perte de symétrie de ces conditions aux limites.

### 6.2.3 Effets de la charge transversale sur deux modes

La fin de ce chapitre est consacrée au calcul des deux premières fréquences propres de la poutre flambée lorsqu'elle est soumise à une charge statique transversale en son milieu. Pour cela, il reste à exprimer les coefficients non-linéaires de la poutre flambée, puis d'appliquer la charge transversale sur un modèle réduit. Ces résultats compléteront ceux obtenus pour le portique au paragraphe 6.2.1, en considérant le couplage entre deux degrés de liberté.

#### 6.2.3.1 Discrétisation de l'équation non-linéaire des poutres

L'équation non-linéaire des poutres 6.32 est complétée par une force statique  $F_s(x)$  et une force dynamique  $F_d(x, t)$ . Cette équation est ensuite discrétisée à l'aide des modes propres  $\phi_n(x)$  calculés linéairement dans le système 6.37. On peut alors discrétiser l'équa-

tion non-linéaire 6.32 par une méthode de Galerkin (voir Emam and Nayfeh [22]) :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (6.38)$$

En utilisant l'orthonormalité des modes, l'équation (6.32) devient :

$$\ddot{q}_m + \omega^2 q_m = b \sum_{i,j}^{+\infty} A_{mij} q_i q_j + \sum_{i,j,k}^{+\infty} B_{mijk} q_i q_j q_k + f_{ms} + f_{md}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.39)$$

où les coefficients non-linéaires sont :

$$A_{mij} = \pi^2 \int_0^1 \cos(2\pi x) \phi_m dx \int_0^1 \phi'_i \phi'_j dx + \pi \int_0^1 \cos(2\pi x) \phi'_j dx \int_0^1 \phi''_i \phi''_m dx$$

$$B_{mijk} = \frac{1}{2} \int_0^1 \phi''_i \phi_m dx \int_0^1 \phi'_j \phi'_k dx \quad (6.40)$$

et les forces extérieures s'expriment :

$$f_{ms} = \int_0^1 F_s \phi_m(x) dx = F_s \phi_m(0.5) \text{ et } f_{md} = \int_0^1 F_d \phi_m(x) dx \quad (6.41)$$

Une fois que ces coefficients sont établis, il est possible de calculer les précontraintes dues à la charge statique  $F_s$  sur chaque mode. Mais ce calcul étant lourd, on se limitera dans la suite à une réduction sur deux modes.

### 6.2.3.2 Résolution de la statique par un modèle réduit

Le comportement statique des poutres flambées sous chargement transverse a été étudié par Vangbo [94] et Qiu et al. [71]. Les poutres flambées sont alors nommées « bistables », car elle font apparaître au moins deux positions stables, la première étant son état initial et la deuxième le résultat du claquage (« snap-through » en anglais) lorsque la charge transverse est grande. En ce sens, le modèle du portique à deux barres présenté précédemment est un bon exemple de ce phénomène.

La caractéristique statique des poutres flambées sous chargement transverse en son milieu n'a pas de forme analytique simple. Les auteurs de [94; 71] l'ont étudiée à partir d'une discrétisation sur les modes de flambage de la poutre droite, et sur un modèle réduit à partir des deux premiers modes. En s'inspirant de cette méthode, on utilise dans la suite une discrétisation et une réduction sur deux modes. Toutefois, l'étude vibratoire nous conduit à choisir les modes de vibration plutôt que les modes de flambage.

La discrétisation du problème statique découle de l'équation 6.44 de laquelle sont ôtés les termes temporels :

$$f_{ms} = \omega^2 q_m - b \sum_{i,j}^N A_{mij} q_i q_j - \sum_{i,j,k}^N B_{mijk} q_i q_j q_k, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.42)$$

Après réduction sur les deux premiers modes, le calcul des coefficients non-linéaires donne :

$$* A_{112} = A_{121} = A_{211} = A_{212} = A_{222} = 0$$

- \*  $B_{1211} = B_{1212} = B_{1221} = B_{1222} = B_{2111} = B_{2112} = B_{2121} = B_{2122} = B_{2221} = 0$
- \*  $A_{221} = 2A_{122}$
- \*  $B_{2211} = B_{1122}$

Le système d'équations statiques 6.42 se réduit alors à :

$$\begin{cases} F_s \phi_1(0.5) = \omega_1^2 q_{1e} - bA_{111}q_{1e}^2 - bA_{122}q_{2e}^2 - B_{1111}q_{1e}^3 - B_{1122}q_{1e}q_{2e}^2 \\ 0 = \omega_2^2 q_{2e} - 2bA_{122}q_{1e}q_{2e} - B_{1122}q_{1e}^2q_{2e} - B_{2222}q_{2e}^3 \end{cases} \quad (6.43)$$

La branche fondamentale est trouvée pour  $q_{2e} = 0$ . Cette branche contient le claquage du système, à la manière du portique. Toutefois, une bifurcation sur le mode 2 intervient avant le claquage pour  $b > 5.12$ . Ces résultats sont en accord avec les travaux sur les « bistables » [94; 71]. Il faut rappeler toutefois que la réduction de modèle se fait depuis les deux premiers modes de vibration de la poutre post-flambée et non sur les deux premiers modes de flambage comme il est fait habituellement.

### 6.2.3.3 Fréquences propres de vibration

Les équations étant adimensionnées, le calcul des fréquences propres est trivial et donne :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_{01}^2 - 2bA_{111}q_{1e} - 3B_{1111}q_{1e}^2 \\ \omega_2^2 = \omega_{02}^2 - 2bA_{122}q_{1e} - 3B_{2211}q_{1e}^2 \end{cases} \quad (6.44)$$

La figure 6.11 montre l'instabilité du système à partir de la décroissance des fréquences

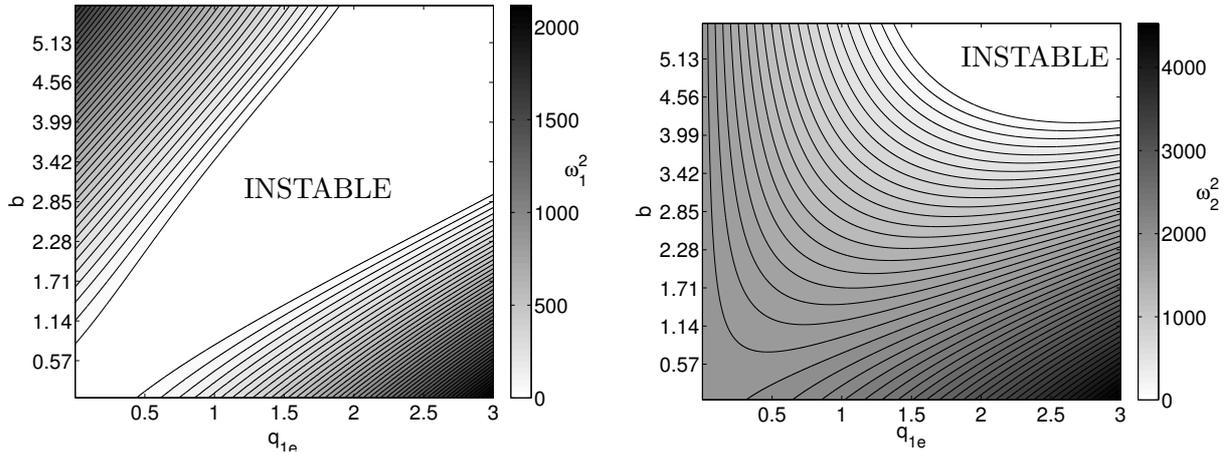


FIG. 6.11 – Evolution des carrés des deux premières fréquences propres dans l'espace des deux paramètres de précontraintes. Mode symétrique (gauche, exemples de déformées à la figure 6.9) et antisymétrique (droite, déformée de la figure 6.10).

propres jusqu'à  $\omega_1 = 0$  ou  $\omega_2 = 0$ . On y retrouve que l'instabilité peut se produire préférentiellement sur le mode symétrique (claquage) ou sur le mode antisymétrique (flambement). Il est alors légitime de se demander si ce modèle très simplifié reproduit fidèlement l'évolution de ces fréquences. Pour cela, un modèle numérique de poutre flambée précontraint par une charge en son milieu a été simulé sous le logiciel *CAST3M* (CEA), simulé en grands

déplacements et calculé par la méthode de Newton-Raphson (voir chapitre 4 pour plus de détails). Les hypothèses du calcul numérique sont :

- un modèle de poutre sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli avec 100 éléments.
- *propriétés géométriques* : la poutre a une longueur de 1m et une épaisseur de 5mm.
- *propriétés mécaniques* : matériau fictif avec pour masse volumique  $\rho = 1000kg/m^3$ , module d'Young  $E = 10^{10}Pa$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .
- *conditions aux limites* : encastree-encastree.

Une comparaison analytique-numérique est présentée pour deux valeurs de  $b$  dans les figures 6.12 et 6.13. Dans le cas où  $b = 1.84$ , présenté figure 6.12, c'est-à-dire pour une poutre très faiblement flambée, on trouve un excellent analytique/numérique. Le modèle linéarisé montre des différences de fréquences importantes, en surestimant l'assouplissement. Dans le cas où  $b = 5.93$  (figure 6.13), les résultats sont moins satisfaisants. Ceci indique que le couplage avec les modes qui n'ont pas été pris en compte dans le modèle réduit n'est plus négligeable pour cette forme initiale.

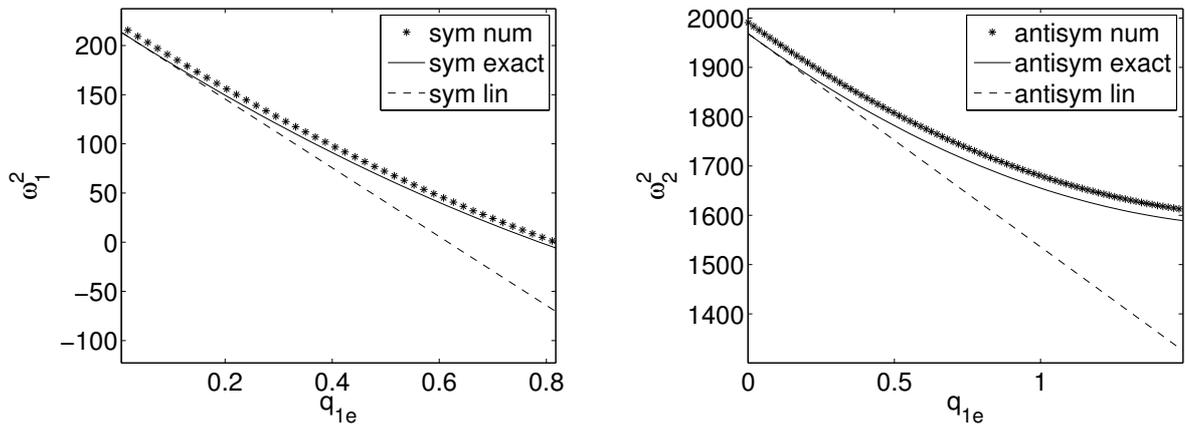


FIG. 6.12 – Comparaison analytique/numérique des effets de la charge transverse  $q_{1e}$  sur les pulsations propre du premier mode symétrique (gauche) et antisymétrique (droite), cas  $b=1.84$ .

## 6.3 Conclusions du chapitre

Ce chapitre était consacré à la présentation de certaines propriétés analytiques de systèmes simples soumis à des précontraintes. Il a permis de classer deux types de structures. Les premières sont soumises à des charges dans des directions et avec des amplitudes assez faibles pour que l'hypothèse de faibles déformations s'applique. Les deuxièmes sont soumises à des chargements qui les obligent à avoir de grands déplacements en statique. Ce sont ces derniers cas qui reproduisent le mieux les tendances observées sur le modèle numérique d'une table de piano du chapitre 5. Un portique à un seul degré de liberté suffit alors à obtenir la caractéristique quadratique observée sur le modèle numérique de piano. Il fait apparaître une autre propriété : le claquage. D'autres propriétés sont aussi observées sur les deux premiers mode d'une poutre flambée chargée transversalement. Le chargement sur un des deux degrés de liberté a des effets sur l'autre degré de liberté par couplage non-linéaire. C'est seulement en prenant ce couplage en compte que l'évolution

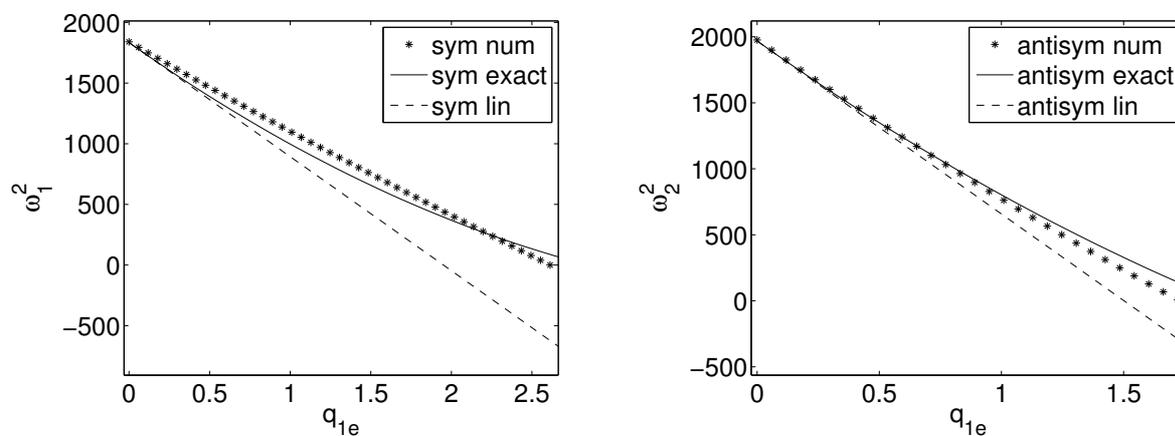


FIG. 6.13 – Comparaison analytique/numérique des effets de la charge transverse  $q_{1e}$  sur les pulsations propres du premier mode symétrique (gauche) et antisymétrique (droite), cas  $b=5.93$ .

des fréquences est pertinente. On constate enfin que le modèle réduit à deux degrés de liberté donne d'excellents résultats.

## Chapitre 7

# Validation expérimentale sur un monocorde précontraint

Les calculs des chapitres précédents doivent être validés expérimentalement. L'idéal aurait été d'effectuer des mesures sur un instrument de musique, mais les modifications de la charge du piano sont des opérations lourdes (les expériences de la littérature n'ont fourni que peu de points de mesures). Les résultats de ce chapitre porteront donc sur « un instrument simplifié », réduit à une corde, un chevalet et une table d'harmonie. L'étude porte sur les effets de deux réglages de l'état initial de la table : sa forme initiale (en la faisant flamber par une charge dans son plan) et le chargement dû à la présence de la corde (en modifiant la tension de la corde).

Ce chapitre est décomposé en deux parties, l'expérience proprement dite et sa modélisation numérique. Les bases théoriques proviennent de la théorie des vibrations de plaques orthotropes (voir la revue de C. Lambourg [46]) couplée aux phénomènes de flambage de plaques étudiés par S. Timoshenko [89] ou encore A. W. Leissa [48].

### 7.1 Expérience

#### 7.1.1 Dispositif expérimental

L'expérience a été effectuée sur un dispositif décrit à la figure 7.1.2. La plaque en épicea a une longueur de 47 cm et une largeur de 21,8 cm pour une épaisseur de 4mm. Ces propriétés mécaniques ont été déduites des vibrations en flexion d'éprouvettes extraites dans les deux sens : densité  $\rho = 416 \text{ kg/m}^3$ , modules d'Young  $E_1 = 1.32.10^{10} \text{ Pa}$ ,  $E_2 = 6.03.10^8 \text{ Pa}$ . Les deux bords en largeur sont collés sur deux poutres en aluminium, elles mêmes assemblées dans un cadre. Le cadre est obtenu à partir de couches d'acier liées par une bande adhésive (voir figure 7.2). Ceci permet de l'alourdir et d'amortir rapidement les vibrations du cadre. La figure 7.2 montre les deux liaisons entre les supports de la plaque et le cadre extérieur. La glissière libère la translation de la plaque dans le plan horizontal, translation contrôlée par deux vis d'un pas de 1.2 mm. Le pivot libère la rotation, contrôlée par un réglage à l'aide de vis. Nous n'utiliserons pas ce réglage dans la suite. Les vis empêchant la rotation sont donc fixes.

Le chevalet est fait en palissandre, ce qui lui donne une raideur du chevalet beaucoup plus grande que celle de l'épicéa de la table. La corde est une corde aiguë de piano en acier tendue symétriquement sur un support de bois épais avec une vis d'un côté et une clé de contrebasse de l'autre, capable de soutenir les tensions importantes de la corde (de l'ordre

---

de plusieurs centaines de newtons). Elle est en contact avec le chevalet en son milieu, et impose ainsi une charge statique transversale au point de contact. Les effets des chargements dans le plan et transversal sont évalués à partir du déplacement du milieu du chevalet mesuré par une jauge de profondeur.

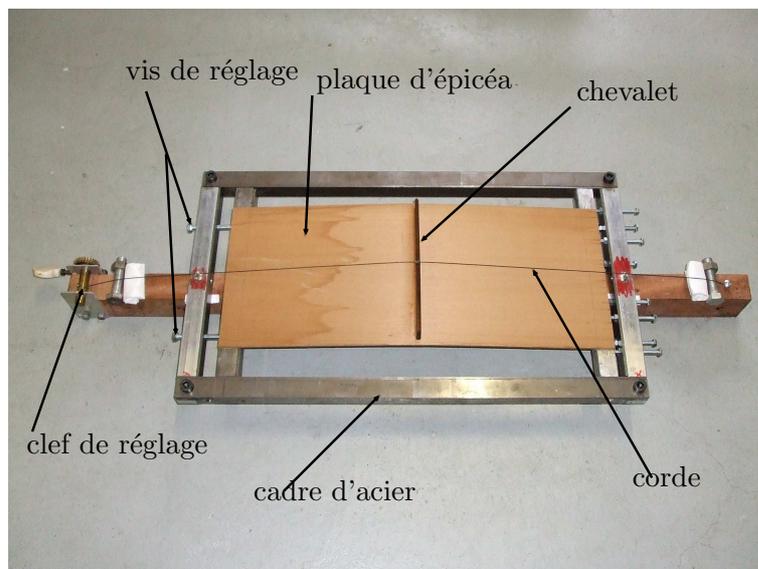


FIG. 7.1 – Dispositif expérimental contenant une plaque et un chevalet chargés par une corde tendue et un chargement dans le plan à l'aide de vis de réglage.

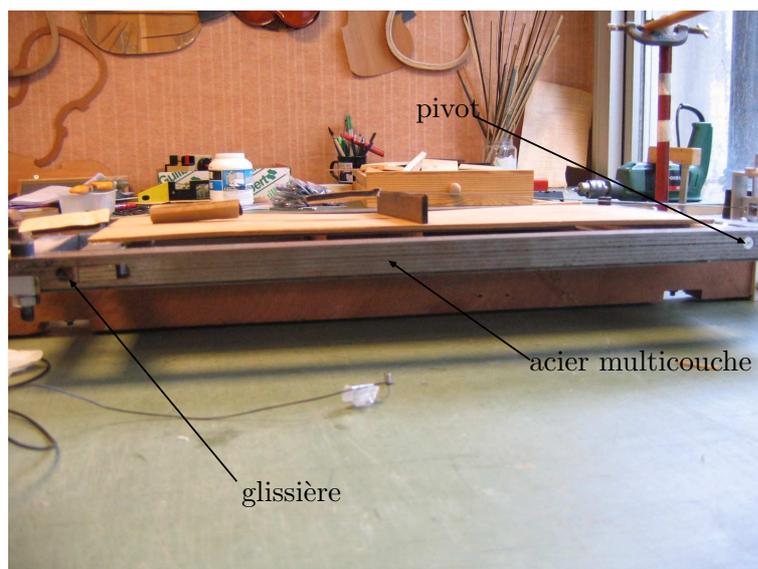


FIG. 7.2 – Liaisons associées à l'assemblage de la plaque dans le cadre. Seule la glissière sera utilisée dans la suite.

### 7.1.2 Méthode d'holographie acoustique en champ proche

L'expérience réalisée dans la suite est une analyse modale pour différents réglages. Ces analyses modales ont été effectuées avec la méthode d'holographie acoustique en champ proche (NAH, pour Nearfield Acoustical Holography) (voir Maynard [57]) à l'Institut Jean le Rond d'Alembert (en collaboration avec S. Le Moyne et F. Ollivier, le dispositif est décrit dans [64]). Le choix a été porté sur cette méthode car elle produit des analyses modales précises et beaucoup plus rapides que par un dispositif d'interférométrie laser (voir l'utilisation de l'interférométrie de B. Richardson [75] sur la guitare et Moore and Zietlow [60] sur la table d'harmonie du piano). La rapidité des expériences est déterminante dans notre cas car les mesures sont effectuées pour de nombreux cas de précontraintes.

Soit  $P_h(\omega, x, y, z_h)$ , la pression mesurée à la pulsation  $\omega$ , par un réseau de microphones situé à la hauteur  $z_h$  de la plaque. Une transformée de Fourier spatiale appliquée à cette pression donne sa représentation dans l'espace des nombres d'ondes notée  $P_h(\omega, k_x, k_y, z_h)$ . On applique ensuite sur ce signal le filtre de Veronesi (ou filtre exponentiel décrit dans [95]). On obtient ainsi la pression filtrée  $P_h^k(\omega, k_x, k_y, z_h)$ .

Pour utiliser la NAH en analyse modale, il faut alors déduire de  $P_h^k$  la vitesse normale de la plaque  $V_s$ . On utilise pour cela un modèle de rétro-propagation, en définissant l'opérateur :

$$G_{XV} = E_{XV}(\omega, k_x, k_y) \cdot H(\omega, k_x, k_y, z_h - z_s) \quad (7.1)$$

où  $H = e^{jk_z(z_h - z_s)}$ , et  $z_s$  la hauteur de la source.  $k_z = (k^2 - (k_x^2 + k_y^2))^{1/2}$  est ainsi imaginaire pur pour les composantes évanescentes du champ et réel pour les composantes qui se propagent. L'opérateur  $E_{XV} = k_z / (\rho c k)$  est indépendant de la distance entre la source et l'hologramme (il provient directement des équations d'Euler).

Une fois ce processus de rétro-propagation effectué, le retour dans l'espace réel se fait grâce à une transformée de Fourier inverse appliquée au signal de vitesse. Un récapitulatif des différentes étapes est présenté sur la figure 7.3.

Les mesures des modes propres de la plaque sans chargement sont présentées en annexe 1. La comparaison avec un calcul éléments finis montre un très bon accord. Toutefois on y remarque des différences sensibles proche des bords dans les déformées modales. Ces différences s'expliquent par le filtrage expérimental des grandes longueurs d'onde. Ces erreurs expérimentales nous empêchent d'analyser l'évolution des déformées modales avec le chargement. Nous limiterons donc les études suivantes à l'analyse de l'évolution des fréquences propres.

### 7.1.3 Effets de la charge dans le plan

L'effet de la charge dans le plan est évalué avec l'évolution des fréquences propres de vibration de la plaque présentée figure 7.6. Pour des charges dans le plan faibles, les fréquences propres commencent toutes par diminuer. Ensuite, certaines augmentent brusquement et d'autres restent approximativement constantes. Les déformées modales révèlent alors que tous les modes dont les fréquences restent constantes ont une ligne nodale transverse au milieu de la plaque. Ce résultat s'apparente à la conclusion de Nayfeh et al. [62] sur une poutre, présenté au chapitre 6.

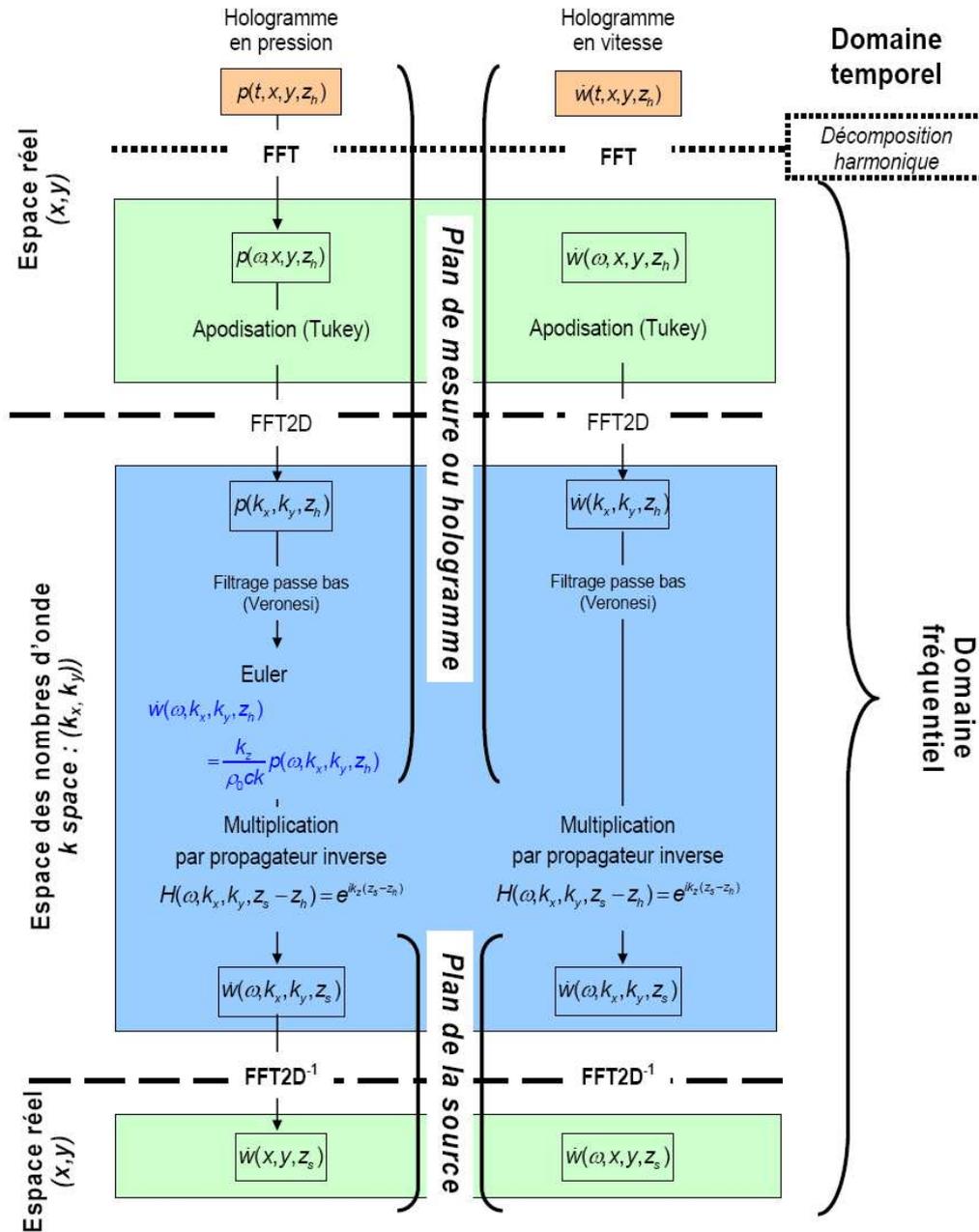


FIG. 7.3 – Schéma synoptique de la reconstruction holographique, d'après F. Ollivier et S. Le Moyne [65].

## 7.1.4 Effets de la charge transversale

### 7.1.4.1 Remarque sur la statique

La charge dans le plan a montré précédemment un effet simple sur la forme de la plaque, de type flambage d'Euler d'une poutre encastree. La charge transversale due à la corde

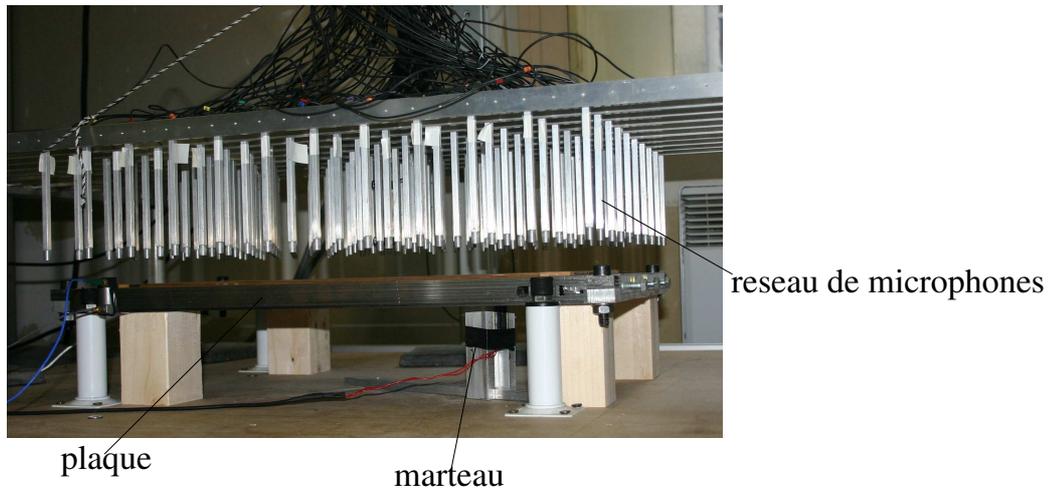


FIG. 7.4 – Expérience NAH. La plaque est excitée par un marteau et les microphones mesurent la pression rayonnée à 25 mm au dessus de la plaque.

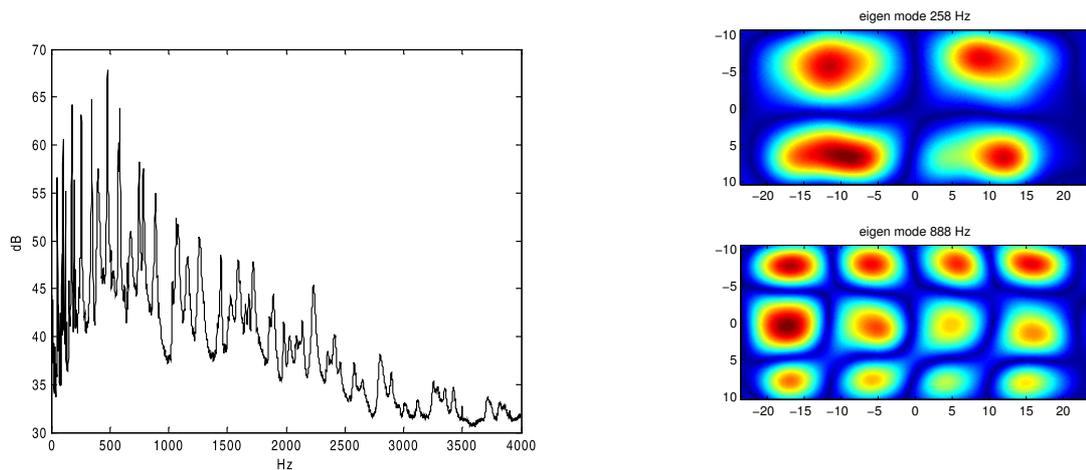


FIG. 7.5 – Exemple de spectre moyenné expérimental et de deux déformées modales mesurées.

provoque des déplacements plus complexes de la table. Le chevalet subit un basculement (aléatoirement d'un côté ou de l'autre), bien qu'il soit chargé en son centre, comme le montre la figure 7.7. Ceci s'apparente une fois de plus à une bifurcation sur un mode de flambage. Mais cette fois, le mode de flambage possède une ligne nodale dans la longueur, obtenue à partir d'un défaut initial (inévitabile) orienté sur ce mode. Ce défaut provient soit de l'inhomogénéité de la plaque de bois utilisée, soit du chargement dans le plan pas parfaitement symétrique.

#### 7.1.4.2 Effets vibratoires

Les fréquences de vibration sont mesurées dans le cas où la flèche initiale vaut  $5.5\text{mm}$  (du même ordre de grandeur que l'épaisseur  $4\text{mm}$  de la plaque). La relation entre la

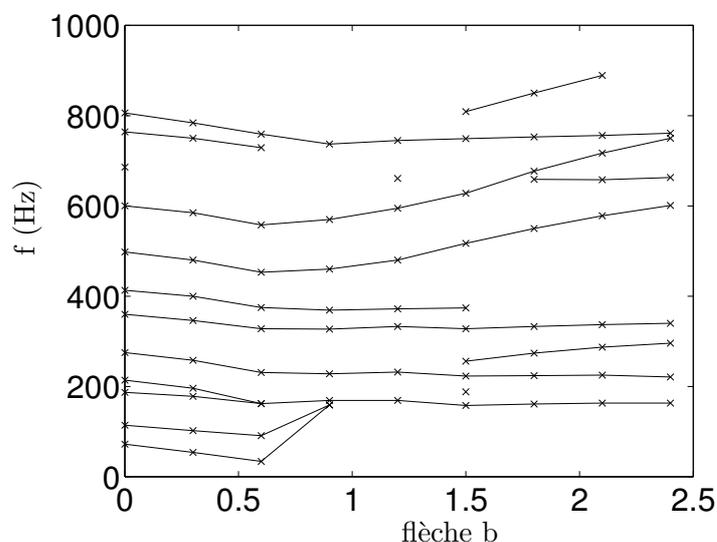


FIG. 7.6 – Effets de la charge dans le plan sur les fréquences de vibrations de la plaque.

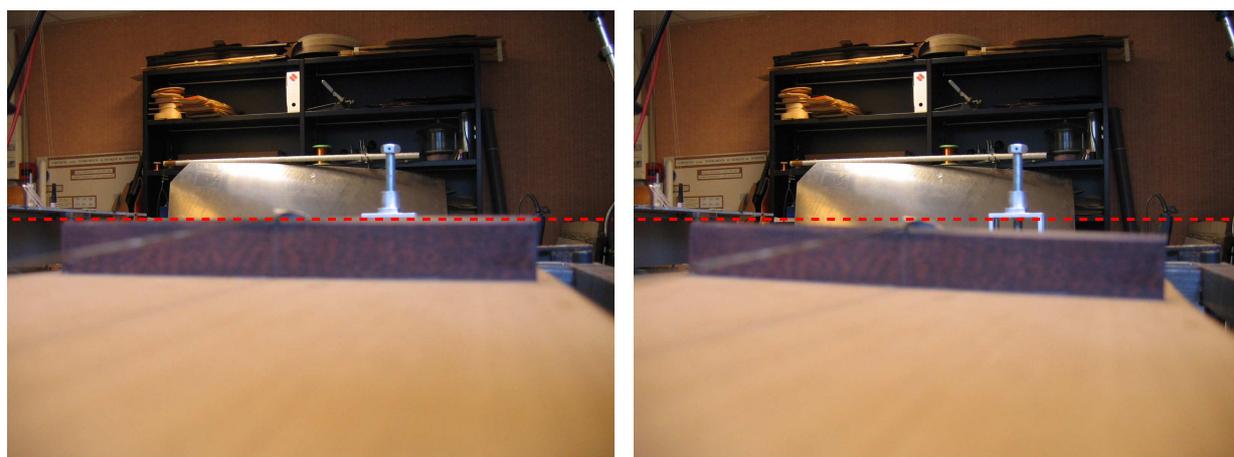


FIG. 7.7 – Effet de la charge transversale sur la forme de la plaque flambée. A gauche, la charge est nulle, le chevalet est horizontal. A droite, la charge est assez grande pour faire basculer le chevalet.

charge transversale et les fréquences propres est représentée par le tracé de  $\left(q, \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)$ , où  $q$  est le déplacement du milieu du chevalet normé par l'épaisseur,  $f$  est la fréquence mesurée pour  $q$  et  $f_0$  est la fréquence mesurée sans charge transversale. On superpose à ces résultats expérimentaux à une fonction d'interpolation quadratique, à la manière de celle utilisée sur le modèle de piano du chapitre 5 :

$$\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = \gamma q^2 + \beta q + \alpha + O(q^2) \quad (7.2)$$

La figure 7.1.4.2 montre que la charge transversale agit principalement sur le premier mode. Un zoom montre toutefois que les autres modes sont aussi modifiés (voir figure 7.9).

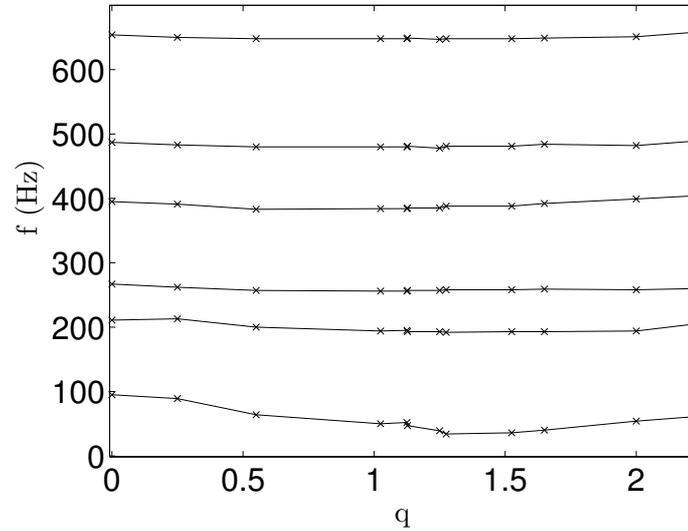


FIG. 7.8 – Effets de la charge transversale due à la corde sur les fréquences de vibrations de la plaque flambée, dans le cas où la flèche initiale vaut  $5.5\text{mm}$  (c'est-à-dire  $b = 1.38$ ).

Pour tous les modes observés, les changements de fréquences sont très bien modélisés par une interpolation quadratique. Le même résultat est obtenu en annexe 3 pour une flèche initiale plus grande ( $9.2\text{ mm}$ ). Un écart significatif apparaît tout de même avec la fonction d'interpolation, dans tous les cas. Ceci peut être justifié par des imprécisions expérimentales. Le calcul numérique suivant apporte toutefois une autre explication.

## 7.2 Modélisation

### 7.2.1 Etablissement du modèle

Ces résultats sont comparés qualitativement avec un calcul numérique. Les propriétés de ce modèle et la comparaison numérique-expérimental pour la plaque sans contrainte sont présentés en annexe 1. Les résultats suivants concernent directement les effets des chargements dans le plan et transversal. Pour chacun de ces deux chargements, le calcul est décomposé en deux étapes :

- Calcul statique. On utilise la méthode de Newton-Raphson (voir chapitre 4 pour des détails sur la méthode) incluant le post-flambage. Pour cela, on introduit un défaut de courbure initial engendrant la bifurcation et la rigidité géométrique due au chargement.
- Calcul vibratoire. On résout le problème aux valeurs propres sur l'état statique obtenu.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\mathbf{q} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{q} \quad (7.3)$$

On obtient ainsi les modes de vibrations pour chaque pas de chargement.

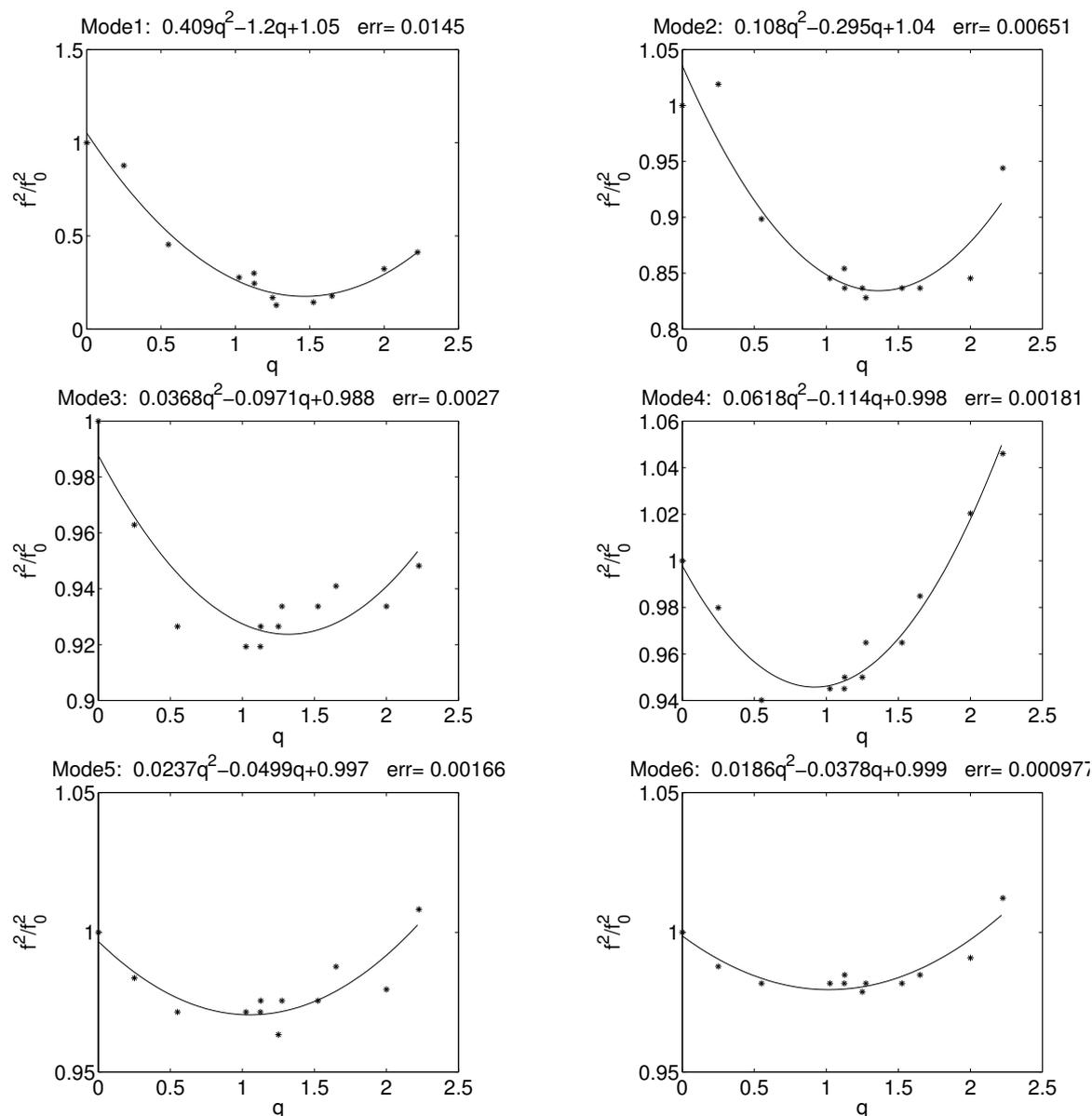


FIG. 7.9 – Résultats expérimentaux des six premières fréquences propres mesurées d'une plaque flambée soumise à une charge statique transversale pour une flèche au centre initiale de 5.5 mm ( $b = 1.38$ ).

## 7.2.2 Simulation des effets de la charge dans le plan

### 7.2.2.1 Comportement statique

Le comportement statique de la plaque soumise à la charge dans son plan est obtenu en donnant un défaut initial à la plaque sur son premier mode de flambage. On y reconnaît la bifurcation classique du flambage d'Euler. Jusqu'à une certaine valeur de chargement, la plaque se comprime sans déflexion. Puis elle fléchit suivant son premier mode de flambage, en suivant cette branche de bifurcation.

### 7.2.2.2 Comportement vibratoire

La figure 7.10 présente les changements des cinq premières fréquences avec le chargement uniforme dans le plan. On observe que ces modifications des fréquences se font en deux étapes. Lors d'une première étape, toutes les fréquences décroissent. Ceci provient de la compression globale de la plaque, sans aucune déflexion. La deuxième étape correspond au fléchissement de la plaque, c'est-à-dire son flambage. On observe dans cette étape deux familles de fréquences. Certaines fréquences ne se modifient pas avec le chargement. Elles proviennent de tous les modes qui ont une ligne nodale sur la largeur centrale, sous le chevalet. Ces modes ne sont pas modifiés par la charge dans le plan. Les autres fréquences propres augmentent. On retrouve ainsi qualitativement les résultats expérimentaux.

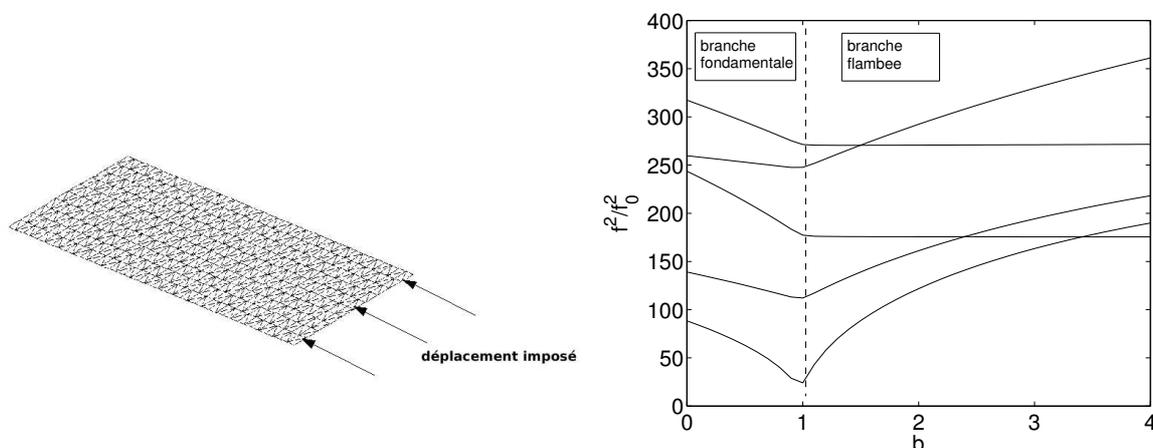


FIG. 7.10 – Evolution des fréquences propres de la table calculées numériquement, sous l'effet d'un chargement dans le plan normalisé par le déplacement de flambage.

## 7.2.3 Simulation des effets de la charge transversale

### 7.2.3.1 Comportement statique

Pour obtenir numériquement le flambage sur le mode de basculement observé expérimentalement, la modélisation doit imposer au système de suivre cette branche bifurquée. On donne ainsi un défaut initial à la plaque flambée correspondant au mode de basculement (mode 5 de flambage pour une plaque flambée de 5.5mm de creux), puis on utilise la méthode de Newton-Raphson. La relation entre la force appliquée au milieu du chevalet et son déplacement au même point est présentée figure 7.11. Cette caractéristique s'apparente au claquage, tout en montrant une plus grande complexité.

Cette complexité s'explique par un effet « deux dimensions ». La figure 7.12 représente les déplacements des deux extrémités du chevalet en fonction du déplacement du milieu du chevalet. Apparaissent alors deux « claquages » différents, respectivement pour l'une et l'autre des extrémités. Ce résultat illustre bien un comportement spécifique des plaques et coques que les modèles analytiques à une dimension du chapitre 6 ne permettent pas d'expliquer.

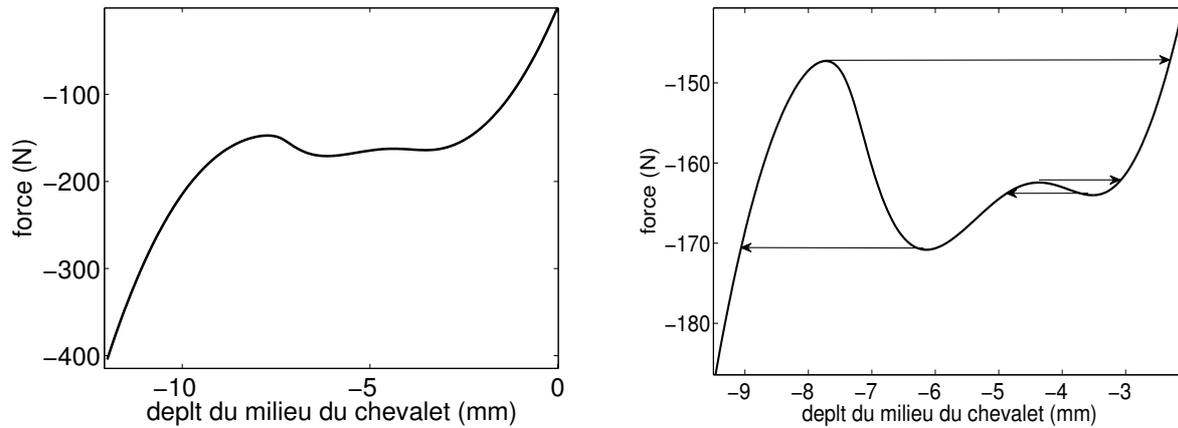


FIG. 7.11 – Relation force-déplacement au chevalet. La figure de droite est un zoom faisant apparaître le double cycle d’hystérésis dû au défaut initial de basculement.

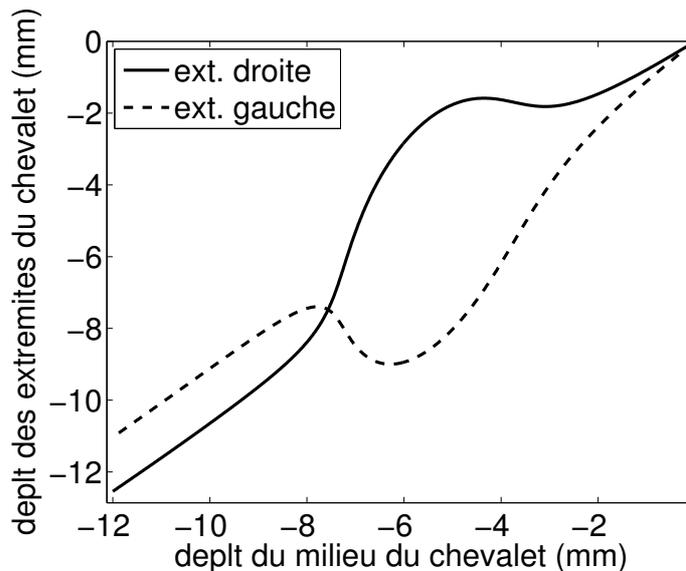


FIG. 7.12 – Déplacements des deux extrémités du chevalet en fonction du déplacement du milieu du chevalet. Le double cycle d’hystérésis se retrouve dans les deux « claquages », vus par l’évolution du déplacement de chaque extrémité du chevalet.

### 7.2.3.2 Comportement vibratoire

Les résultats du calcul des vibrations sont représentés figure 7.13. Ils montrent des différences sensibles avec ceux obtenus sans la prise en compte du défaut et avec les résultats sur un modèle linéarisé avec défaut 7.14.

Tant que les déplacements du milieu du chevalet sont inférieurs à l’épaisseur de la plaque, ces trois modèles donnent des décroissances de fréquences similaires. Mais dès ce déplacement atteint, le modèle linéaire n’est plus pertinent. Le modèle non-linéaire sans défaut reste globalement satisfaisant mais montre ses limites pour les déplacements autour des bifurcations ( $q$  compris entre 1 et 2 épaisseurs).

La loi quadratique pour les fréquences, qui a servi de fonction d'interpolation, est caractéristique du modèle non-linéaire sans défaut initial. Les fréquences s'éloignent de cette loi pour un défaut initial introduisant des bifurcations. L'expérience ayant montré clairement des bifurcations, cette explication semble pertinente.

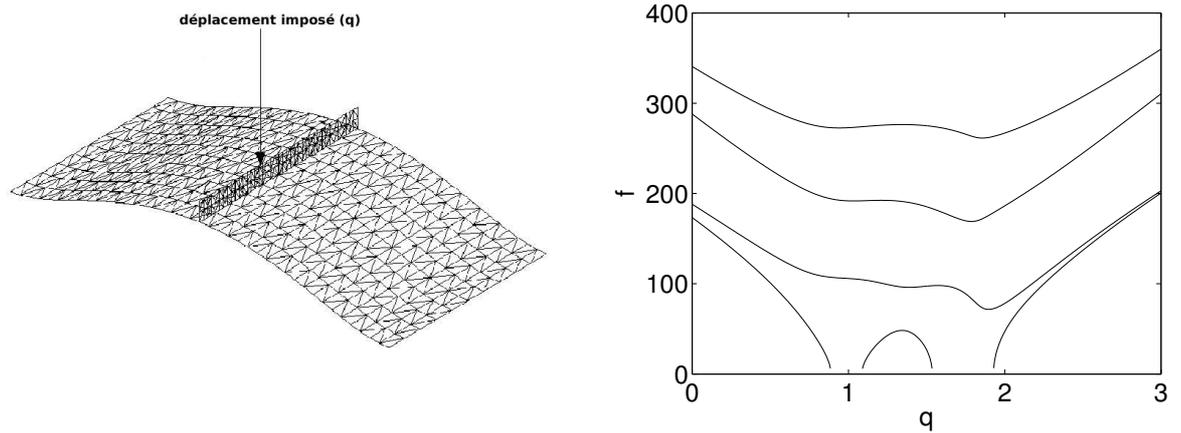


FIG. 7.13 – Evolution des premières fréquences propres avec la charge statique transversale.

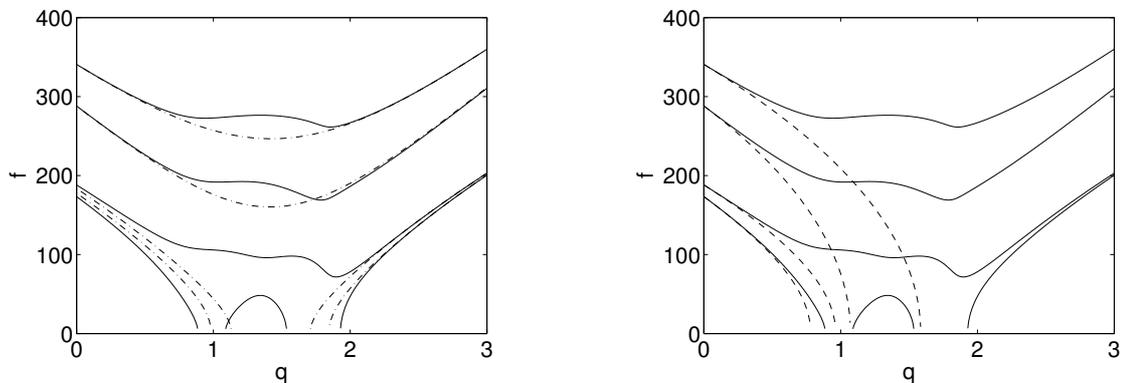


FIG. 7.14 – Différences entre un modèle non-linéaire avec défaut (-) et non-linéaire sans défaut (.-, gauche) et linéarisé (- -, droite).

### 7.3 Conclusion

A partir de la méthode holographique NAH, ce chapitre a montré les conséquences de la charge de la corde sur les fréquences de vibrations d'une plaque flambée. La loi quadratique prédite par les chapitres précédents est bien observée. Le calcul numérique montre les limites de cette loi, pour des configurations autour de bifurcations. On retrouvera ces résultats dans Mamou-Mani et al. [53].

Ces résultats valident expérimentalement les études numériques et analytiques des chapitres précédents. Mais des bifurcations sont observées, contrairement au calcul numérique

sur une table de piano. Ces bifurcations ont été observées expérimentalement, puis introduites a posteriori dans un modèle, à l'aide d'un défaut initial. On est alors en droit de se demander si la table de piano est à même de subir aussi des bifurcations. Nos modèles ne suffisent pas pour conclure sur cette question, il faudrait expérimenter sur un instrument réel.

---

Deuxième partie

**Vibrations non-linéaires de  
systèmes précontraints**

---



*« On dit souvent qu'il faut expérimenter sans idée préconçue. Cela n'est pas possible ; non seulement ce serait rendre toute expérience stérile, mais on voudrait qu'on ne le pourrait pas »*

Henri Poincaré, *La Science et l'hypothèse* [69]

L'effet des précontraintes sur les vibrations non-linéaires de structures est présenté ici. Cette étude a été motivée par les travaux de C. Besnainou [7] et V. Gibiat et al. [29], posant la question de la non-linéarité matérielle et géométrique du corps sonore des instruments à cordes. Nous verrons comment le réglage de la charge de la table d'harmonie peut potentiellement générer des grands déplacements et donc de la non-linéarité géométrique.

Deux chapitres montrent respectivement :

- les conséquences des précontraintes sur les vibrations non-linéaires de systèmes simples : Les modèles analytiques présentés précédemment (au chapitre 6) sont poussés à leurs limites.
  - la réalisation d'un prototype expérimental d'instrument à table d'harmonie « non-linéaire ».
-



## Chapitre 8

# Vibrations non-linéaires de systèmes simples précontraints

### 8.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des vibrations non-linéaires de systèmes précontraints. Sous l'hypothèse de matériaux élastiques linéaires, seule la non linéarité géométrique est considérée. En particulier, les effets des précontraintes sous l'hypothèse de grands déplacements sont évalués.

### 8.2 Vibrations non-linéaires

Les premières études des vibrations non-linéaires remontent à la thèse de H. Poincaré en 1879 et aux travaux de A. M. Liapunov, puis par B. Van der Pol, A. N. Krylov et N. N. Bogoliubov. L'unité de cette discipline vient du fait qu'elle s'attache à décrire des cas où le théorème de superposition n'est plus valable. Les systèmes non-linéaires ont un comportement qui peut paraître paradoxal : la somme de deux causes n'entraîne pas l'addition de leurs effets. La résolution analytique de tels problèmes est donc particulièrement difficile. Si l'amplitude de vibration est petite, on peut utiliser des méthodes de perturbations. A. H. Nayfeh et D. T. Mook [63] font un résumé de ces techniques, citant les méthodes de développements limités, de Lindstedt-Poincaré, des échelles multiples, de l'équilibrage harmonique et de la moyenne. Ces méthodes donnant des résultats analytiques, elles offrent une meilleure compréhension des phénomènes. Toutefois, elles nécessitent des calculs lourds, avec un temps augmentant très vite avec le nombre de degrés de liberté. Une autre approche consiste à utiliser les modes normaux non-linéaires (NNM). On pourra se référer à l'article de A. F. Vakakis [93] ou la thèse de F. Pérignon [70] pour une revue détaillée. Le concept de « modes normaux » provient de la théorie des vibrations de systèmes linéaires et du principe de superposition. Que le système soit discret ou continu, les modes de vibration permettent de découpler les équations du mouvement. Il est alors possible d'écrire la réponse à une sollicitation extérieure quelconque comme la superposition des réponses de chaque mode. Dans le cas de systèmes régis par des équations non-linéaires, le principe de superposition ne s'applique plus. Pourtant, le concept de NNM a pour ambition d'étendre le maximum d'attributs des modes de vibration aux cas non-linéaires. Pour cela, R. M. Rosenberg [76] a choisi une approche géométrique originale au lieu des méthodes analytiques traditionnelles. En introduisant l'espace de configura-

---

tion (espace des déplacements), il utilise le concept de ligne nodale, pour caractériser les trajectoires des modes normaux dans cet espace pour une amplitude fixée. En effet, pour chaque amplitude de vibration, la géométrie modale est modifiée et elle se traduira par une courbe différente dans l'espace de configuration. Cette approche, utilisée seulement pour les systèmes conservatifs, est prolongée par exemple par A. F. Vakakis [93], pour tenter de décrire la stabilité et les bifurcations des NNM.

S. Shaw et C. Pierre [79; 80] ont étendu la définition des NNM comme une variété invariante dans l'espace des phases (déplacements/vitesses). Par leur qualité d'invariance, les NNM ont une propriété importante : lorsque les conditions initiales sont données dans l'invariant, la trajectoire restera dans l'invariant. De plus, l'invariant est tangent au sous espace plan correspondant au mode du système linéarisé. Cette qualité d'invariance est très intéressante, car elle induit que, si l'excitation du système non-linéaire est produite uniquement sur un NNM, la réponse se fera uniquement sur le NNM. Cette idée, complétée par la théorie des *formes normales* (développée dans Guckenheimer and Holmes [35]), est à l'origine du changement de variables très efficace développé par C. Touzé et al. [91]. La théorie des formes normales provient des théorèmes de Poincaré et de Poincaré-Dulac, résumés par C. Touzé [90] dont l'idée principale est la suivante : en l'absence de relation de résonance, un système dynamique non-linéaire se réduit à sa partie linéaire grâce à un changement de variables non-linéaire. Bien que les NNM ne possèdent pas la propriété d'orthogonalité, leur propriété d'invariance justifie leur utilisation pour le calcul des résonances non-linéaires. Dans le cas général, les vibrations à grands déplacements d'une structure non amortie peuvent s'exprimer sous la forme d'oscillateurs couplés avec des termes quadratiques et cubiques :

$$\ddot{q}_m + \omega^2 q_m + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \hat{\alpha}_{mij} q_i q_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} \hat{\beta}_{mijk} q_i q_j q_k = 0, \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

Grâce à un changement de variable approprié, décrit formellement dans [91], on peut écrire ce problème à partir d'oscillateurs invariants. La dynamique sur la  $m^{ième}$  variété invariante s'écrit :

$$\ddot{R}_m + \omega_m^2 R_m + (\alpha_{mmm} + \hat{\beta}_{m m m m}) R_m^3 + \beta_{m m m m} R_m \dot{R}_m^2 = 0 \quad (8.2)$$

où les coefficients  $\alpha_{mmm}$  et  $\beta_{m m m m}$  sont liés à  $\hat{\alpha}_{mij}$  et  $\hat{\beta}_{mijk}$  par une relation explicitée par Touzé et al. dans [91]. On note de plus qu'un terme d'amortissement  $\dot{R}$  apparaît. Ce changement de variables a fait ses preuves pour modéliser certains comportements observés expérimentalement sur des gongs et cymbales. On peut citer notamment Chaigne et al. [12] et Thomas et al. [87].

### 8.2.1 Descripteurs des vibrations non-linéaires

Lorsqu'un système mécanique vibre à grands déplacements, il ne peut plus être simplement décrit par ses modes propres orthogonaux, caractérisés par une déformée modale, une pulsation  $\omega_0$  et un facteur de qualité  $Q$ . Le cas non-linéaire est en effet plus complexe, et est caractérisé par de nombreux descripteurs. Qualitativement, le tracé des diagrammes de phases ou plus généralement le point de vue des systèmes dynamiques est un bon descripteur de la non-linéarité. Cette approche a été utilisée depuis les années 80 sur les instruments de musique, en particulier pour le frottement de la corde du violon ou encore les instruments à vent, et plus récemment pour les gongs et cymbales. Quantitativement,

la description reste aujourd'hui difficile. Pour simplifier leur présentation, on sépare dans la suite les systèmes à un degré de liberté de ceux à plusieurs degrés de liberté, à la manière de Nayfeh and Mook [63].

### 8.2.1.1 Système à un degré de liberté

Un système à un degré de liberté soumis à des vibrations faiblement non-linéaires, est décrit par les propriétés suivantes :

- Résonance principale. Le régime permanent d'un système à 1 degré de liberté est caractérisé en premier lieu par sa résonance principale. On obtient ce comportement lorsque l'excitation a lieu à une fréquence proche de la pulsation propre  $\omega_0$  du système :  $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$ , où  $\sigma = O(1)$  est appelé le paramètre de désaccord. On obtient ainsi une forme de résonance confondue avec la résonance linéaire pour les amplitudes faibles, mais qui s'infléchit avec l'amplitude. Lorsque cette inflexion se dirige vers les fréquences basses (resp. hautes), on appelle ce comportement *assouplissant* (resp. *raidissant*). Ce caractère se retrouve par les vibrations libres d'amplitude  $a$  (backbone curves). La pulsation de résonance  $\omega_{nl}$  est alors exprimée par :

$$\frac{\omega_{nl}}{\omega_0} = 1 + \Gamma a^2 \quad (8.3)$$

où  $\Gamma$  est le *coefficient effectif de non-linéarité*. Si  $\Gamma > 0$ , le comportement est raidissant, et si  $\Gamma < 0$ , le comportement est assouplissant.  $\Gamma$  est ainsi un premier descripteur de la non-linéarité.

- Enrichissement harmonique. Ces modifications de la fréquence d'oscillation avec l'amplitude sont accompagnées d'un enrichissement harmonique (appelé « distortion »). Il a été observé par exemple sur des poutres flambées par Kreider and Nayfeh [43] ou encore sur des gongs par O. Thomas [86]. Du point de vue théorique, cet effet apparaît par l'utilisation d'une méthode perturbative à l'ordre de la non-linéarité.
- Résonances secondaires. Si l'on excite le système avec une fréquence éloignée de  $\omega_0$ , la courbe de résonance principale est suffisante pour connaître la réponse dans la plupart des cas. Toutefois, le système peut entrer en résonance pour certaines fréquences particulières nommées *fréquences de résonances secondaires*. On peut décomposer ces résonances secondaires en deux familles. La première est la résonance sous-harmonique. On la trouve dans les cas où la pulsation d'excitation  $\Omega$  est proche d'un multiple de la pulsation propre :  $\Omega = n\omega_0 + \varepsilon\sigma$ , où  $n = 3$  pour une non-linéarité cubique et  $n = 2, 3$  pour une non-linéarité quadratique et cubique. Le régime permanent est la combinaison de la solution particulière à la fréquence  $\Omega$  et d'un terme de vibration libre, pour une fréquence valant exactement  $\frac{\Omega}{n}$ . La deuxième famille est celle des résonances super-harmonique. Si la pulsation d'excitation  $\Omega$  est proche d'un diviseur de la pulsation propre, c'est-à-dire  $n\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$ , le même genre de comportement est obtenu, la fréquence de la solution particulière vaut  $\Omega$  mais celle des vibrations libres vaut cette fois  $n\Omega$ .

### 8.2.1.2 Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Pour des systèmes continus ou possédant plusieurs degrés de libertés, plusieurs fréquences propres interviennent lors des vibrations, nommées dans la suite  $\omega_n$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Certains phénomènes peuvent intervenir :

- Des *résonances internes* : Si certaines de ces fréquences ont des relations du type  $\omega_2 = p\omega_1$  ou  $\omega_3 = p\omega_1 \pm n\omega_2$ , elles sont dites en résonance interne. Ceci implique qu'un couplage très important intervient entre les modes propres, non prédit par une approche linéaire.
- Des *résonances combinées* : Dans le cas d'une non-linéarité quadratique, une résonance apparaît à la pulsation  $\Omega$  si :  $\Omega \approx \omega_n \pm \omega_m$ . Dans le cas d'une non-linéarité cubique, une résonance pour :  $\Omega \approx \omega_n \pm \omega_m + \omega_p$  et  $\Omega \approx \frac{1}{2}\omega_n \pm \omega_m$ .
- Une *non existence de solutions périodiques*. Il y a un échange perpétuel entre différents modes.

### 8.2.1.3 La réduction de modèle

L'utilisation de modèles réduits allège grandement les calculs, mais la validité d'un tel modèle est souvent remise en cause aujourd'hui. Touzé et al. [91] ont montré que l'application d'une méthode de perturbation sur un modèle réduit du système non-linéaire donne des résultats faux quant au caractère raidissant ou assouplissant de la résonance non-linéaire (backbone curve) et préconisent l'utilisation des NNM. W. Lacarbonara [44] arrive à des conclusions similaires en comparant les résultats obtenus par une méthode de perturbation sur un modèle réduit et sur le modèle continu.

### 8.2.1.4 Effets des précontraintes sur les vibrations non-linéaires

Les précontraintes ont des effets sur les vibrations non-linéaires. L'exemple le plus simple est celui des résonances internes. Puisque les précontraintes changent les fréquences de vibrations (voir chapitre 6), elles peuvent permettre d'accorder les modes, et ainsi de favoriser certaines résonances internes. Les travaux sur les poutre flambées de Nayfeh et al. [62], Kreider and Nayfeh [43] ou Emam and Nayfeh [22], sont autant d'exemple d'utilisation d'une précontrainte axiale pour accorder des modes, et ainsi générer différentes caractéristiques non-linéaires. La suite de ce chapitre va montrer comment certaines précontraintes s'approchant de celles induites par la fabrication des tables d'harmonie, peuvent modifier la non-linéarité de systèmes simples.

## 8.3 L'exemple du portique à un degré de liberté

Le portique présenté au chapitre 6 est maintenant étudié du point de vue des vibrations non-linéaires. Cette fois, son déplacement vertical est appelé  $x$  (à la place de  $w$ ). L'équation régissant les vibrations de la masse ponctuelle soumise à la force statique  $F_s$  et la force dynamique  $F_d$  s'écrit :

$$m\ddot{\bar{x}} + K(\bar{x})\bar{x} = F_s + F_d \quad (8.4)$$

où  $K(\bar{x}) = 2ES_0 \left[ \frac{\sin^2 \alpha_0}{l_0} + \frac{3 \sin \alpha_0}{2l_0^2} \bar{x} + \frac{1}{2l_0^3} \bar{x}^2 \right]$  est la rigidité associée au problème non-linéaire écrite (déjà écrite en 6.15).

Soit  $\bar{x} = x_0 + x$  où  $x_0$  est le déplacement statique et  $x$  le déplacement dynamique. L'équation (8.4) devient :

$$m\ddot{x} + \left[ K(x_0) + 2ES_0 \left( \frac{3 \sin \alpha_0}{2l_0^2} x + \frac{1}{2l_0^3} x^2 + \frac{1}{l_0^3} x_0 x \right) \right] (x_0 + x) = F_s + F_d \quad (8.5)$$

Or  $K(x_0)x_0 = F_s$  donc

$$m\ddot{x} + \left[ K(x_0) + \frac{ES_0}{l_0^3}x^2 + \left( \frac{3ES_0 \sin \alpha_0}{l_0^2} + \frac{3ES_0}{l_0^3}x_0 \right)x + \frac{2ES_0 \sin^2 \alpha_0}{l_0} \left( 1 + 3\frac{x_0}{l_0 \sin \alpha_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{x_0}{l_0 \sin \alpha_0} \right)^2 \right) \right] x = F_d \quad (8.6)$$

Les vibrations du système libre, c'est-à-dire pour  $F_d = 0$ , s'écrivent, en variables sans dimensions :

$$\ddot{x}^* + \frac{1}{2}x^{*3} + \frac{3}{2}(1 + x_0^*)x^{*2} + (1 + 3x_0^* + \frac{3}{2}x_0^{*2})x^* = 0 \quad (8.7)$$

où

$$x^* = \frac{x}{l_0 \sin \alpha_0}, \quad x_0^* = \frac{x_0}{l_0 \sin \alpha_0}, \quad t^* = t \sqrt{\frac{2ES_0 \sin \alpha_0}{ml_0}} \quad (8.8)$$

L'équation 8.3.2 représente ainsi la dynamique non-linéaire libre du portique avec précontrainte, caractérisée par le déplacement initial  $x_0$ . Son étude qualitative, à l'aide de diagrammes de phases, et quantitative par une méthode de perturbation, est proposée aux paragraphes suivants.

### 8.3.1 Analyse qualitative

On cherche maintenant à évaluer les effets de la précontrainte  $x_0$ . Dans le cas général, l'équation différentielle 8.3.2 n'a pas de solution analytique connue. On peut donc rechercher des solutions qualitatives à partir d'un diagramme de phase (c'est-à-dire dans le plan  $(x, \dot{x})$ ), à la manière des systèmes dynamiques. Pour cela, on effectue un calcul numérique sous MATLAB par une méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 4. Les effets de  $x_0$  s'établissent en observant les attracteurs du système, en fixant une valeur du déplacement initial  $x_{ini}$  identique quelque soit la valeur de  $x_0$ , et une vitesse initiale  $\dot{x}_{ini} = 0$ .

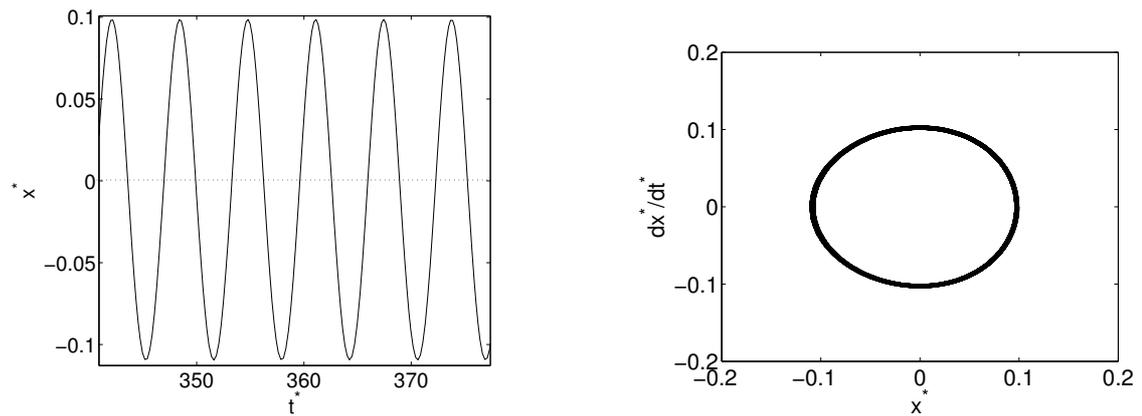


FIG. 8.1 – Vitesse du portique sans précontrainte ( $x_0 = 0$ ) avec un déplacement initial  $x_{ini} = 0.1$  et une vitesse initiale  $\dot{x}_{ini} = 0$ , et son diagramme de phase.

Les figures 8.1 et 8.2 montrent les caractéristiques temporelles et les diagrammes de phase pour deux valeurs différentes de  $x_0$  et pour même  $x_{ini}$ . On remarque des conséquences qualitatives importantes de  $x_0$ . Le déplacement sans précontrainte de la figure 8.1 est quasi-sinusoidal, ce qui se traduit par un quasi-cercle dans le diagramme des phases. En

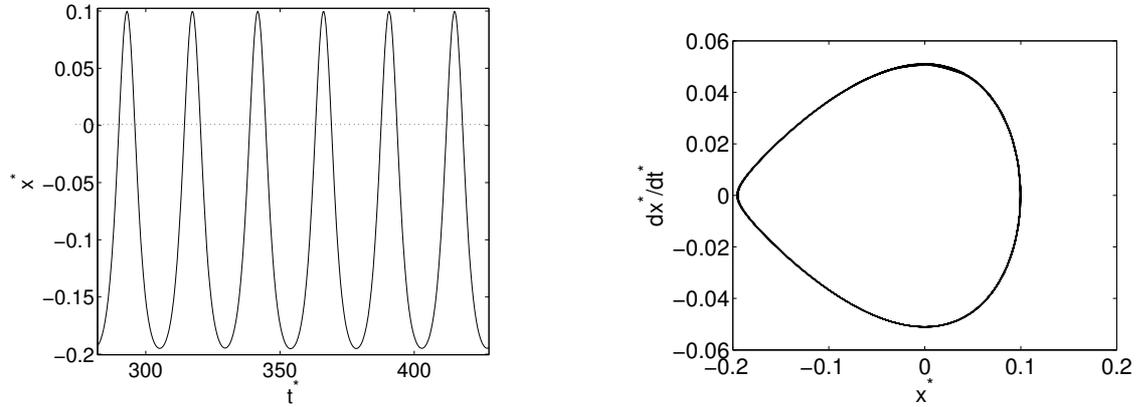


FIG. 8.2 – Vitesse du portique pour une précontrainte  $x_0 = -0.321$  avec un déplacement initial  $x_{ini} = 0.1$  et une vitesse initiale  $\dot{x}_{ini} = 0$ , et son diagramme de phase.

revanche, celui avec un  $x_0 < 0$  de la figure 8.2 a perdu sa symétrie, et le diagramme de phase est déformé. Un bilan des effets qualitatifs de  $x_0$  est présenté figure 8.3. On y voit des modifications significatives du diagramme de phase avec  $x_0$ . On peut ainsi remarquer que plus  $x_0$  descend dans les négatifs, plus le système devient « plus non-linéaire », c'est-à-dire que pour une même condition initiale, le diagramme de phase est plus déformé. Ces changements morphologiques s'accompagnent d'une diminution de l'amplitude en vitesse. Celle-ci s'explique bien en théorie linéaire. L'amplitude de la vitesse vaut en linéaire  $a\omega$  ou  $a$  est l'amplitude du déplacement et  $\omega$  la pulsation propre (figure 8.3). Lorsque  $x_0$

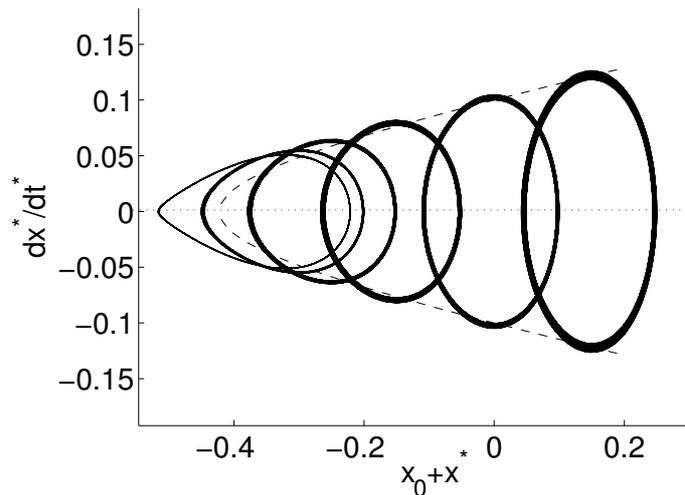


FIG. 8.3 – Profil de phase pour plusieurs valeurs de précontrainte  $x_0$  pour une condition initiale  $x_{ini} = 0.1$ . En pointillé est tracée la valeur de  $(x_{ini} \times \omega)$ , modélisant le lieu des extrema de vitesse.

s'approche du claquage statique (snap-through), le diagramme de phase change brusquement de forme (figure 8.4). Cette caractéristique est représentative de tous les systèmes claquants (voir par exemple [22] pour des poutres flambées).

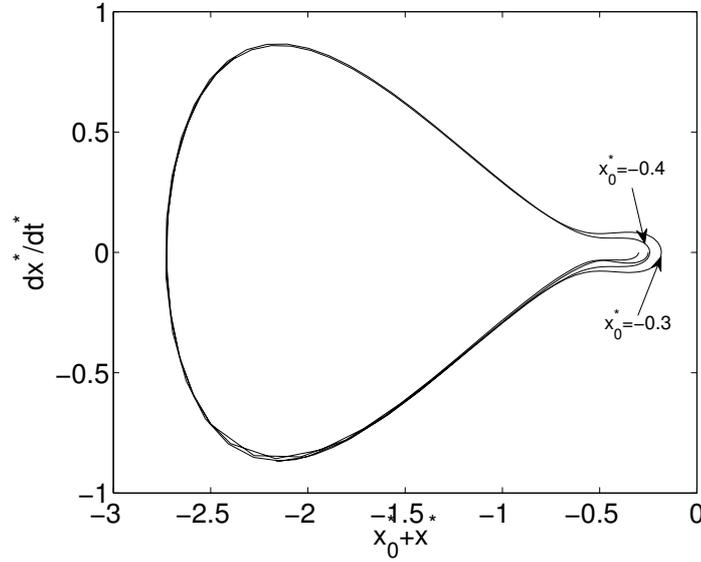


FIG. 8.4 – Exemples de claquages dynamiques : profils de phase pour  $x_0 = -0.3$  et  $x_0 = -0.4$  pour une condition initiale  $x_{ini} = 0.1$ .

### 8.3.2 Analyse quantitative

Par souci de simplicité, on met l'équation sous la forme :

$$\ddot{x}^* + Bx^{*3} + Ax^{*2} + \omega^2 x^* = 0 \quad (8.9)$$

où

$$\omega^2 = (1 + 3x_0^* + \frac{3}{2}x_0^{*2}), A = \frac{3}{2}(1 + x_0^*) \text{ et } B = \frac{1}{2} \quad (8.10)$$

Sous l'hypothèse que le déplacement en variables sans dimensions  $x$  est petit (le déplacement réel est petit devant  $l_0 \sin \alpha_0$ ), on utilise la méthode des échelles multiples qui donne une solution approchée de l'équation 8.3.2 à l'aide de calculs effectués pour différentes échelles temporelles. On peut alors écrire  $x$  comme un développement limité d'un paramètre  $\varepsilon$  au même ordre de grandeur que lui :

$$x^*(t; \varepsilon) = \varepsilon x_1^* + \varepsilon^2 x_2^* + \varepsilon^3 x_3^* + \dots \quad (8.11)$$

De plus, on décompose le temps en échelles de  $\varepsilon$  :

$$T_n = \varepsilon^n t \text{ avec } n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.12)$$

Les dérivées temporelles s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (8.13)$$

où  $D_n = \partial/\partial T_n$ . La substitution de 8.13 et 8.11 dans 8.3.2 suivie de l'identification en puissances de  $\varepsilon$  donnent le système :

$$\text{ordre } \varepsilon : D_0^2 x_1^* + \omega^2 x_1^* = 0 \quad (8.14)$$

$$\text{ordre } \varepsilon^2 : D_0^2 x_2^* + \omega^2 x_2^* = -2D_0 D_1 x_1^* - A x_1^{*2} \quad (8.15)$$

$$\text{ordre } \varepsilon^3 : D_0^2 x_3^* + \omega^2 x_3^* = -2D_0 D_1 x_2^* - D_1^2 x_1^* - 2D_0 D_2 x_1^* - 2A x_1^* x_2^* - B x_1^{*3} \quad (8.16)$$

La solution de 8.14 se met alors sous la forme :

$$x_1^* = C(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + \bar{C} e^{-i\omega T_0} \quad (8.17)$$

où  $C$  est une fonction complexe inconnue et  $\bar{C}$  son conjugué.

En remplaçant 8.17 dans 8.15, on a :

$$D_0^2 x_2^* + \omega^2 x_2^* = -2i\omega D_1 C(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} - A \left[ C^2 e^{2i\omega T_0} + C\bar{C} \right] + cc \quad (8.18)$$

où  $cc$  désigne le complexe conjugué des termes précédents. On remarque ainsi la présence d'un terme résonant à la pulsation  $\omega$  qui a une validité limitée dans le temps (Nayfeh and Mook [63]). La solution uniforme dans le temps s'obtient alors en annulant ce facteur résonant, ainsi :

$$D_1 C(T_1, T_2) = 0 \quad (8.19)$$

Donc,  $C$  ne dépend pas de  $T_1$ . La solution de 8.15 est alors :

$$x_2^* = \frac{AC^2}{3\omega^2} e^{2i\omega T_0} - \frac{A}{\omega^2} C\bar{C} + cc \quad (8.20)$$

On réécrit l'équation 8.16 en introduisant les valeurs de  $x_1$  de 8.17 et  $x_2$  de 8.20 :

$$D_0^2 x_3^* + \omega^2 x_3^* = - \left[ 2i\omega D_2 C - \frac{10A^2 - 9B\omega^2}{3\omega^2} C\bar{C} \right] e^{i\omega T_0} - \frac{3B\omega^2 + 2A^2}{3\omega^2} C^3 e^{3i\omega T_0} + cc \quad (8.21)$$

dont le terme résonant s'annule pour

$$2i\omega D_2 C - 9B\omega^2 - 10A^2 3\omega^2 C^2 \bar{C} = 0 \quad (8.22)$$

dont on cherchera la solution  $C$  sous forme polaire :

$$C = \frac{1}{2} a e^{i\phi} \quad (8.23)$$

où  $a$  et  $\phi$  sont des fonctions réelles de  $T_2$ . Les parties réelles et imaginaires de l'équation 8.22 s'écrivent :

$$a' = 0 \text{ et } \omega a \phi' + \frac{10A^2 - 9B\omega^2}{24\omega^2} a^3 = 0 \quad (8.24)$$

où  $a'$  et  $\phi'$  sont les dérivées de  $a$  et  $\phi$  par rapport à  $T_2$ .  $a$  vaut donc une constante et

$$\phi = \frac{9B\omega^2 - 10A^2}{24\omega^3} a^2 T_2 + \phi_0 \quad (8.25)$$

où  $\phi_0$  est une constante. La forme de  $C$  de 8.23 devient :

$$C = \frac{1}{2} a \exp \left( i \frac{9B\omega^2 - 10A^2}{24\omega^3} \varepsilon^2 a^2 t + i\phi_0 \right) \quad (8.26)$$

où on a réécrit  $T_2 = \varepsilon^2 t$ . On obtient finalement comme solution de l'équation 8.3.2

$$x^* = \varepsilon a \cos(\tilde{\omega} t + \beta_0) - \frac{\varepsilon^2 a^2 A}{2\omega^2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cos(2\tilde{\omega} t + 2\beta_0) \right] + O(\varepsilon^3) \quad (8.27)$$

où

$$\tilde{\omega} = \omega \left[ 1 + \frac{9B\omega^2 - 10A^2}{24\omega^4} \varepsilon^2 a^2 \right] + O(\varepsilon^3) \quad (8.28)$$

### 8.3.2.1 Résonance non-linéaire

Les non-linéarités se caractérisent en premier lieu par la résonance non-linéaire (backbone curve), qui montre la dépendance de la fréquence de résonance avec l'amplitude de vibration. Soit  $\alpha_{bc}$  le coefficient effectif de non-linéarité (terme défini dans l'équation 8.3), obtenu à partir de l'équation 8.27 :

$$\alpha_{bc} = \frac{9B\omega^2 - 10A^2}{24\omega^4} = -\frac{3}{4} \frac{1 + \frac{7}{4}x_0^* + \frac{7}{8}x_0^{*2}}{\left(1 + 3x_0^* + \frac{3}{2}x_0^{*2}\right)^2} = -\frac{1}{3} \frac{1 + \frac{7}{4}x_0^* + \frac{7}{8}x_0^{*2}}{\left(x_0^* + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x_0^* + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (8.29)$$

Il apparaît que  $\alpha_{bc} < 0$  quelque soit la valeur de  $x_0$ . Ceci signifie que le comportement non-linéaire est toujours assouplissant, c'est-à-dire que la fréquence de résonance diminue avec l'amplitude de vibration, quelque soit la précontrainte.

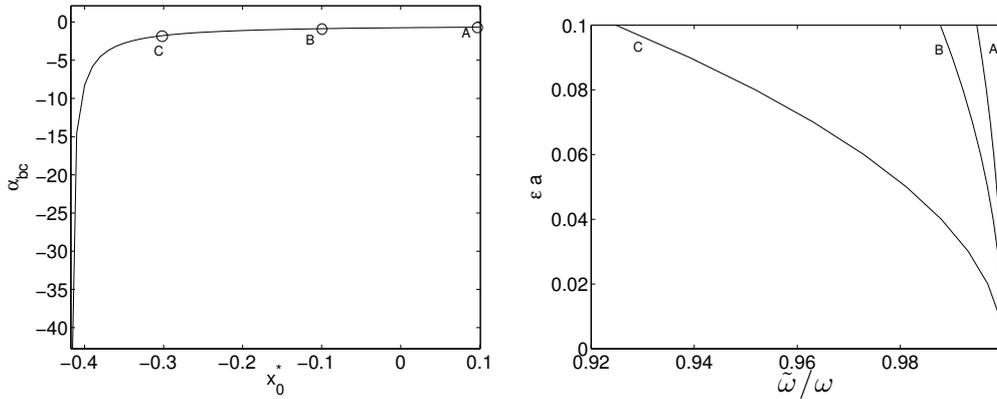


FIG. 8.5 – A gauche, évolution de la valeur absolue du coefficient de non linéarité  $\alpha_{bc}$  avec le déplacement statique  $x_0^*$ . A droite, 3 exemples de résonance non-linéaire.

La figure 8.5 présente l'évolution de  $\alpha_{bc}$  avec  $x_0$  et des résonances non-linéaires (backbone curves) dans quelques cas.  $\alpha_{bc}$  augmente jusqu'au claquage ce qui indique une amplification des propriétés assouplissantes avec le niveau de précontrainte. Le claquage est alors caractérisé par  $|\alpha_{bc}| \rightarrow \infty$ .

### 8.3.2.2 Enrichissement harmonique

Un deuxième descripteur de la non-linéarité est l'enrichissement harmonique. On le définit à partir de la solution à l'ordre 1 de l'équation (8.27) comme le rapport de l'amplitude de l'harmonique 2 générée par non-linéarité et l'amplitude de l'harmonique 1 :

$$d = \frac{A}{6\omega^2} \varepsilon a = \frac{1}{4} \frac{1 + x_0^*}{1 + 3x_0^* + \frac{3}{2}x_0^{*2}} \varepsilon a = \frac{1}{6} \frac{1 + x_0^*}{\left(x_0^* + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x_0^* + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \varepsilon a \quad (8.30)$$

Il apparaît sur la figure 8.6 que l'enrichissement en harmonique 2 augmente jusqu'au claquage. Comme pour  $\alpha_{bc}$ ,  $d \rightarrow \infty$  au claquage.

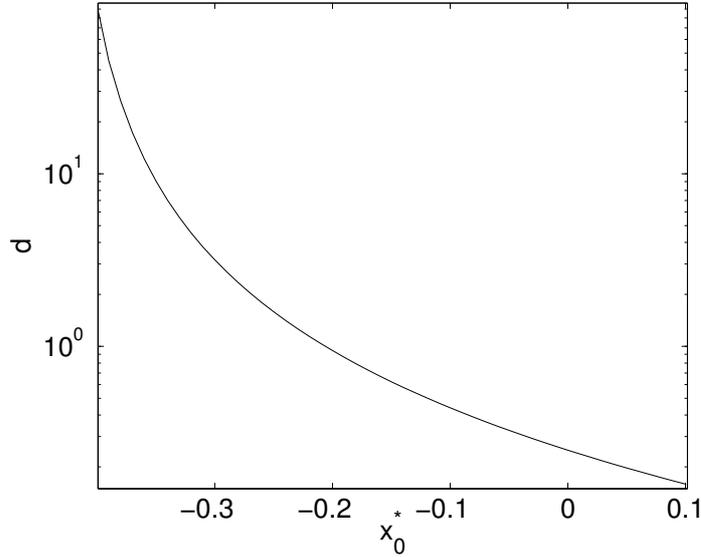


FIG. 8.6 – Evolution de l'enrichissement en harmonique 2 avec le déplacement statique initial  $x_0$ , pour une amplitude de déplacement  $\varepsilon a = 1$ .

### 8.3.3 Apports des effets des précontraintes par rapport aux seuls effets géométriques

Nous avons étudié dans les paragraphes précédents les effets des précontraintes en analysant l'évolution des propriétés non-linéaires depuis une géométrie initiale. Si l'on cherche à établir les effets des précontraintes séparés des modifications géométriques, il est plus approprié de comparer les propriétés de systèmes ayant une même géométrie actuelle mais obtenue avec ou sans précontraintes.

Soit deux systèmes de deux barres paramétrés initialement respectivement par :  $(l_1, \alpha_1, \omega_{01}, A_{01}, B_{01})$  ((1)) et  $(l_2, \alpha_2, \omega_{02}, A_{02}, B_{02})$  ((2)). On a ainsi :

$$l_1 \sin \alpha_1 = l_2 \sin \alpha_2 - x_0 \quad (8.31)$$

$$l_1 \cos \alpha_1 = l_2 \cos \alpha_2 \quad (8.32)$$

(1) est soumis à un déplacement  $x_0$  l'amenant dans sa position actuelle paramétrée par  $(l_2, \alpha_2, \omega_{11}, A_{11}, B_{11})$ . Les systèmes (1) et (2) ont alors exactement la même géométrie  $(l_2, \alpha_2)$ , mais obtenue avec précontrainte pour (1) et sans précontrainte pour (2). L'effet des précontraintes est alors décrit par les rapports des coefficients, qui valent après calculs :

$$\frac{\omega_{11}^2}{\omega_{02}^2} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \left(1 + x_0^* - \frac{x_0^{*2}}{2}\right) \quad (8.33)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \quad (8.34)$$

où  $x_0^* = x_0 / (l_2 \sin \alpha_2)$ .

Les différences de coefficients indiquent des conséquences importantes des précontraintes sur la non linéarité. Les coefficients effectifs de non linéarité et les enrichissements

harmoniques sont augmentés de manière significative par le niveau de précontraintes. L'effet des précontraintes n'est donc pas négligeable devant les effets géométriques et peut au contraire devenir prépondérant dans le cas où  $x_0$  s'approche de  $x_0^{st} = (1 - \sqrt{3})l_2 \sin \alpha_2$  comme le montre la figure 8.7. C'est ainsi le cas des précontraintes de compression qui présente des configurations où cet effet est le plus marqué.

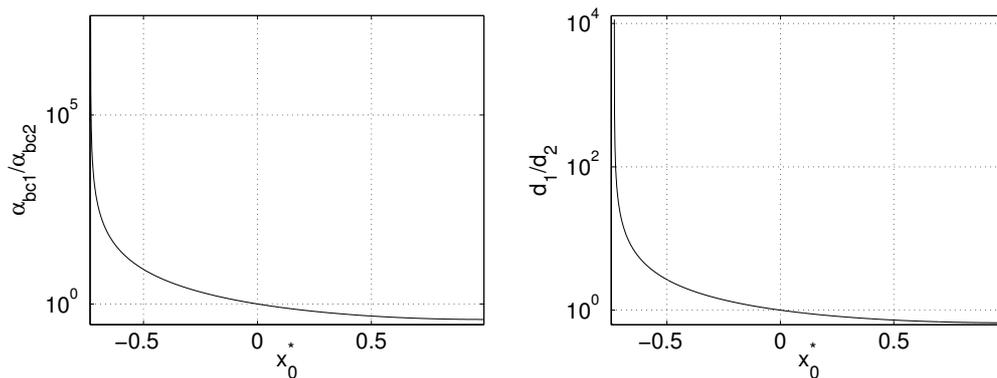


FIG. 8.7 – Rapport entre le coefficient effectif de non-linéarité (gauche) et l'enrichissement en harmonique 2 (droite) du système précontraint et ceux du système de même géométrie sans précontrainte.

On a présenté dans ce paragraphe des résultats issus des vibrations d'un système à un degré de liberté précontraint. Ils montrent que les propriétés vibratoires non-linéaires dépendent fortement de la précontrainte. Elles augmentent avec la compression des barres et diminuent avec la traction.

Ce modèle simple nous a permis d'établir que, pour une amplitude vibratoire fixée  $\varepsilon a$  (suffisamment petite), les propriétés non-linéaires sont très significativement modifiées avec le niveau de précontrainte, en particulier proche du point limite de claquage du système. Enfin, les comparaisons pour une même géométrie obtenue avec ou sans précontraintes montrent que les effets de précontraintes sont à prendre en compte puisqu'ils peuvent devenir prépondérants pour des déplacements statiques de l'ordre de grandeur du déplacement de claquage.

Ce système unidimensionnel ne porte qu'une partie de la problématique des contraintes initiales que l'on trouve sur les instruments de musique (la « mise en charge » pour les fabricants). De plus, contrainte initiale et chargement sont des scalaires pris dans l'unique direction du problème. Les effets des précontraintes sur deux portiques couplés ont été étudiés par D. Parenthoine [66]. Ce travail a montré que les précontraintes agissent aussi sur le couplage des modes en grands déplacements.

## 8.4 La poutre flambée réduite à deux degrés de liberté

L'étude des vibrations des deux premiers modes d'une poutre flambée (dont un exemple est présenté figure 8.8) du chapitre 6, a montré que la charge transverse statique a des effets significatifs sur les deux premières fréquences propres. Des instabilités de claquage ou de flambage peuvent ainsi advenir sous certaines conditions de chargement. Ces résultats

sont maintenant complétés par les effets de ce chargement sur les vibrations non-linéaires.

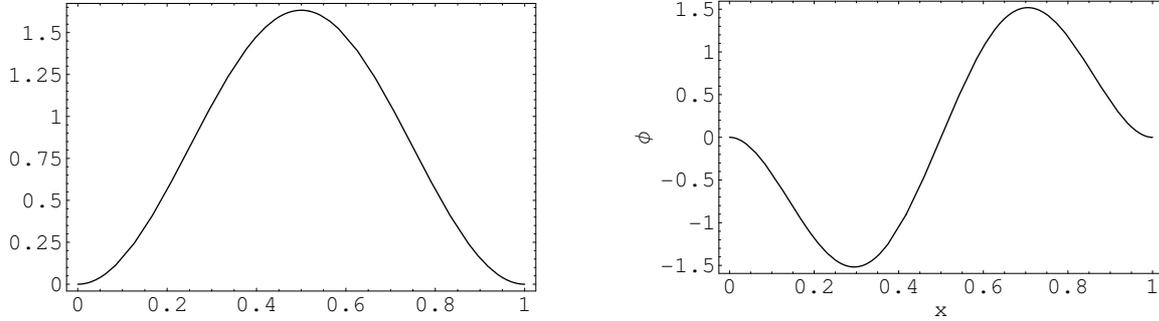


FIG. 8.8 – Exemples de déformées des deux premiers modes de vibration d’une poutre flambée (voir chapitre 6 pour plus de détails).

Comme au chapitre 6, la charge transversale statique  $F_s$  est appliquée au milieu de la poutre. On introduit la forme des déplacements  $q_1 = q_{1e} + q_{1d}$  et  $q_2 = q_{2d}$ , où  $q_{1e}$  est le déplacement statique associé au mode 1 sur la branche fondamentale ( $q_{2e}$  étant nul car le chargement transverse est effectué sur un noeud de ce mode). L’équation du système chargé statiquement par  $F_s$  et dynamiquement par  $F_{1d}$  et  $F_{2d}$  s’écrit alors :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{1d} - bA_{111}(q_{1e} + q_{1d})^2 - bA_{122}q_{2d}^2 - B_{1111}(q_{1e} + q_{1d})^3 - B_{1122}(q_{1e} + q_{1d})q_{2d}^2 + \omega_1^2(q_{1e} + q_{1d}) \\ = F_s\phi_1(0.5) + F_{1d}, \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$\ddot{q}_{2d} - 2bA_{122}(q_{1e} + q_{1d})q_{2d} - B_{1122}(q_{1e} + q_{1d})^2q_{2d} - B_{2222}q_{2d}^3 + \omega_2^2q_{2d} = F_{2d} \quad (8.36)$$

où les valeur des  $A_{ijk}$  proviennent de la formule 6.40 et  $B_{ijkl}$  proviennent de la formule 6.40. En utilisant l’expression statique liant  $q_{1e}$  et  $F_s$  :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{1d} - (bA_{111} + 3B_{1111}q_{1e})q_{1d}^2 - (bA_{122} + B_{1122}q_{1e})q_{2d}^2 - B_{1111}q_{1d}^3 \\ - B_{1122}q_{1d}q_{2d}^2 + (\omega_1^2 - 2bA_{111}q_{1e} - 3B_{1111}q_{1e}^2)q_{1d} = F_{1d}, \\ \ddot{q}_{2d} - (2bA_{122} + 2B_{1122}q_{1e})q_{1d}q_{2d} - B_{1122}q_{1d}^2q_{2d} + (\omega_2^2 - 2bA_{122}q_{1e} - B_{1122}q_{1e}^2)q_{2d} = F_{2d} \end{aligned} \quad (8.37)$$

Ce système de deux équations non-linéaires couplées représente la dynamique non-linéaire de ce système, avec deux paramètres de précontrainte :  $b$  provenant du flambage de la poutre droite, et  $q_{1e}$ , déplacement imposé par la charge transverse statique. Les paragraphes suivants sont consacrés à la résolution du système libre ( $F_{1d} = F_{2d} = 0$ ) dans deux cas :

- Une condition initiale en déplacement est donnée au milieu du système. Dans ce cas, seul le mode symétrique est excité, c’est-à-dire que  $q_{1ini} \neq 0$  et  $q_{2ini} = 0$ . Le problème se réduit à un degré de liberté.
- le déplacement initial n’est pas imposé au milieu donc  $q_{1ini} \neq 0$  et  $q_{2ini} \neq 0$ . Ceci engendre un couplage entre les deux modes . Les influences des précontraintes sont alors évaluées sur ce couplage.

### 8.4.1 Cas où $q_{2ini} = 0$

Si l'excitation dynamique se produit au même point que la charge statique, c'est-à-dire sur le noeud de vibration du mode antisymétrique, on a  $q_{2ini} = 0$ . dans ce cas, le système 8.37 se réduit à :

$$\ddot{q}_{1d} - (bA_{111} + 3B_{1111}q_{1e})q_{1d}^2 - B_{1111}q_{1d}^3 + (\omega_1^2 - 2bA_{111}q_{1e} - 3B_{1111}q_{1e}^2)q_{1d} = F_{1d} \quad (8.38)$$

#### 8.4.1.1 Analyse qualitative

L'évolution du diagramme de phase avec la précontrainte  $q_{1e}$  est représentée sur la figure 8.9. On remarque les mêmes propriétés que celles du portique. Plus la précontrainte se rapproche de la précontrainte de claquage, plus le diagramme de phase se déforme, c'est-à-dire devient « plus non-linéaire ».

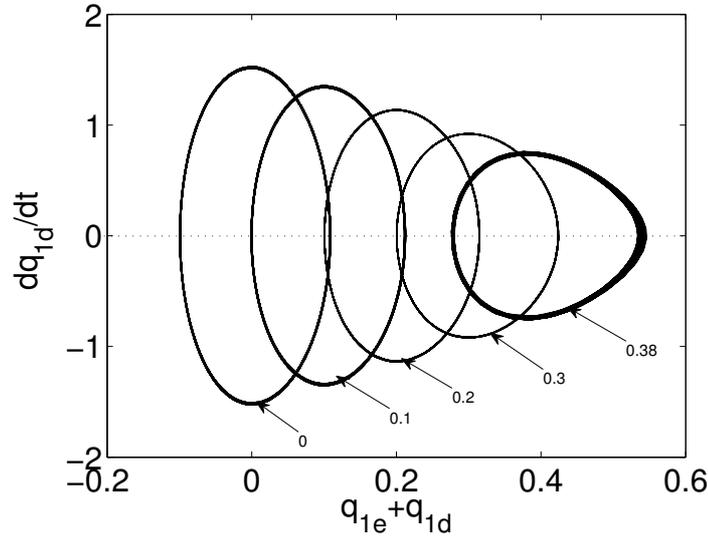


FIG. 8.9 – Profil de phase pour plusieurs valeurs de précontrainte  $q_{1e}$  pour une flèche initiale  $b = 1.84$  et une condition initiale  $q_{1dini} = -0.1$ , dans le cas où  $q_{2d} = 0$ .

#### 8.4.1.2 Analyse quantitative

L'équation 8.38 est maintenant résolue dans le cas faiblement non-linéaire. Sa forme à un seul degré de liberté est similaire au portique du paragraphe 8.3, et sa solution s'écrit toujours :

$$q_{1d} = \varepsilon a \cos(\tilde{\omega}t + \beta_0) - \frac{\varepsilon^2 a^2 \hat{A}}{2\omega^2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cos(2\tilde{\omega}t + 2\beta_0) \right] + O(\varepsilon^3) \quad (8.39)$$

où

$$\tilde{\omega} = \omega \left[ 1 + \frac{9\hat{B}\omega^2 - 10\hat{A}^2}{24\omega^4} \varepsilon^2 a^2 \right] + O(\varepsilon^3) \quad (8.40)$$

Pour ce système  $\hat{A} = -(bA_{111} + 3B_{1111}q_{1e})$  et  $\hat{B} = -B_{1111}$  et  $\omega = \omega_1^2 - 2bA_{111}q_{1e} - 3B_{1111}q_{1e}^2$ . Les résultats obtenus sont similaires à ceux du portique, le caractère assouplissant est amplifié pour les points de fonctionnements s'approchant de l'instabilité de claquage.

### 8.4.2 Cas où $q_{2ini} \neq 0$

Cette fois, les deux modes du système précontraint sont initialement excités. La dynamique est alors caractérisée par le système d'équations 8.37.

#### 8.4.2.1 Analyse qualitative

Il s'avère que la dynamique du premier mode est influencée par celle du second. On

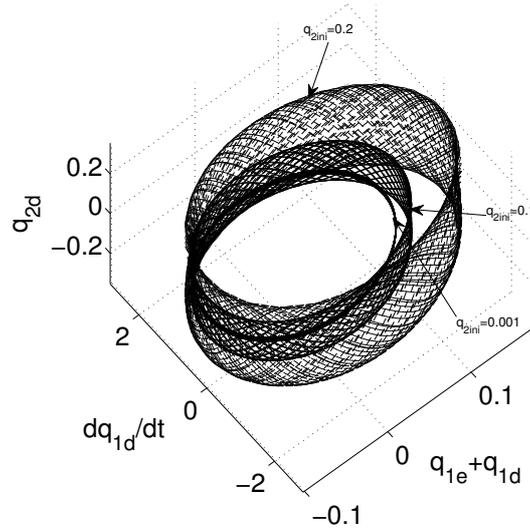


FIG. 8.10 – Profil de phase du mode symétrique avec  $b = 1.84$ ,  $q_{1e} = 0$  et  $q_{1ini} = -0.1$  pour plusieurs valeurs de la condition initiale sur le second mode  $q_{2ini} = -0.01, -0.1$  et  $-0.2$ .

observe ainsi deux cas :

- Premier cas, représenté figure 8.10 : Le point de fonctionnement est loin du claquage. La valeur de  $q_{2ini}$  ne modifie pas qualitativement le diagramme de phase. Elle affecte tout de même l'amplitude de  $q_{1d}$ , par couplage non-linéaire.
- Deuxième cas, représenté figure 8.11 : Le point de fonctionnement est proche du claquage. La valeur de  $q_{2ini}$  aide le système à claquer dynamiquement.

Le deuxième mode est aussi fortement influencé par l'amplitude du premier mode. Selon que le système est loin du flambage sur le second mode (figure 8.12) ou au contraire proche (figure 8.13), l'amplitude du premier mode a des conséquences plus ou moins marquées. Le diagramme de phase fait apparaître une complexité grandissante jusqu'aux points très proches du flambage.

Les différents résultats de ce paragraphe montrent que la précontrainte a des effets très importants sur la dynamique du système couplé.

Enfin, pour terminer de se persuader de l'effet significatif des précontraintes, la figure 8.14 montre le diagramme de phase du mode antisymétrique pour  $q_{1e} = 1.398$ . La forme très complexe de ce diagramme de phase est à comparer à celle des figures 8.12 et 8.13. On a ajouté le diagramme 3D montrant le couplage important avec le mode symétrique. La difficulté inhérente à ce type de système est que l'amplitude de chaque oscillateur influe sur la dynamique de l'autre oscillateur. Un changement de variables approprié est utilisé dans l'étude quantitative suivante.

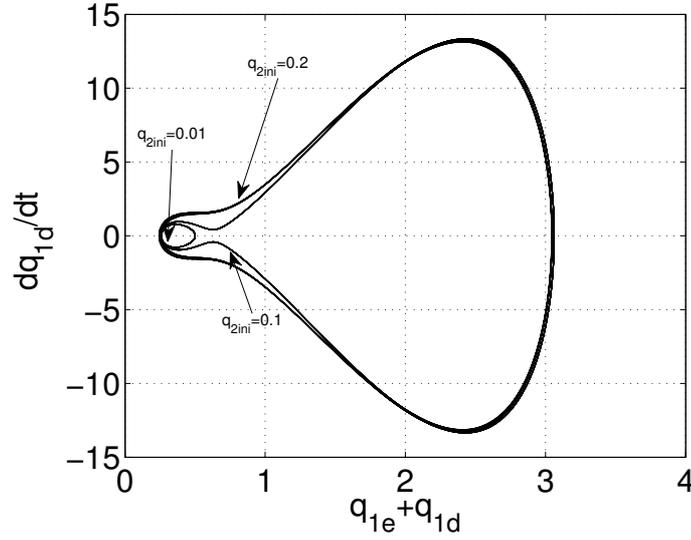


FIG. 8.11 – Profil de phase du mode symétrique avec  $b = 1.84$ ,  $q_{1e} = 0.36$  et  $q_{1ini} = -0.1$  pour plusieurs valeurs de la condition initiale sur le second mode  $q_{2ini} = -0.01, -0.1$  et  $-0.2$ .

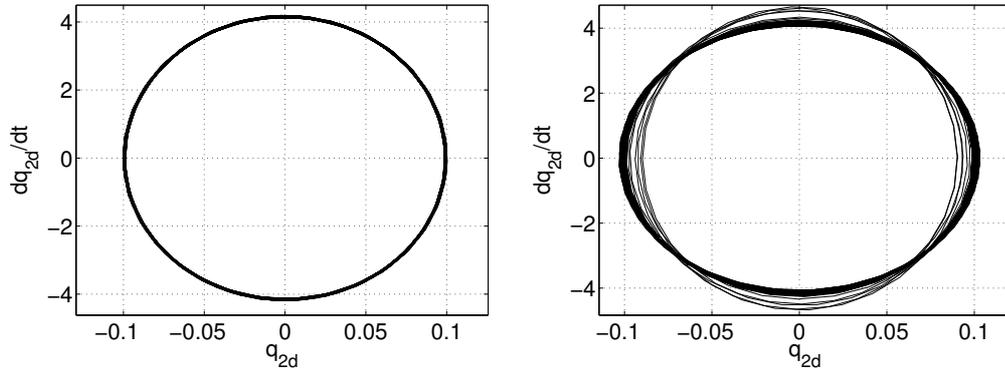


FIG. 8.12 – Profil de phase du mode antisymétrique avec  $b = 1.84$ ,  $q_{1e} = 0.36$  et  $q_{2ini} = -0.1$  pour plusieurs valeurs de la condition initiale sur le second mode  $q_{1ini} = -0.01$  et  $-0.1$ .

### 8.4.3 Etats stationnaires par les modes normaux non-linéaires (NNMs)

Le couplage non-linéaire entre les deux oscillateurs implique qu'il n'existe pas de base orthogonale sur laquelle exprimer ce problème. Les vibrations libres ( $F_{1d} = F_{2d} = 0$ ) de ce système d'équations se résolvent par les NNMs. En effet, les termes couplés empêchent d'utiliser une méthode perturbative sur 1 degré de liberté. En utilisant le changement de variables proposé par Touzé et al. [91] décrit au paragraphe 8.2, le système 8.37 devient :

$$\begin{cases} \ddot{R}_1 + \omega_{1e}^2 R_1 + (\alpha_1 - B_{1111})R_1^3 + \beta_1 R_1 \dot{R}_1^2 = 0 \\ \ddot{R}_2 + \omega_{2e}^2 R_2 + (\alpha_2 - B_{2222})R_2^3 + \beta_2 R_2 \dot{R}_2^2 = 0 \end{cases} \quad (8.41)$$

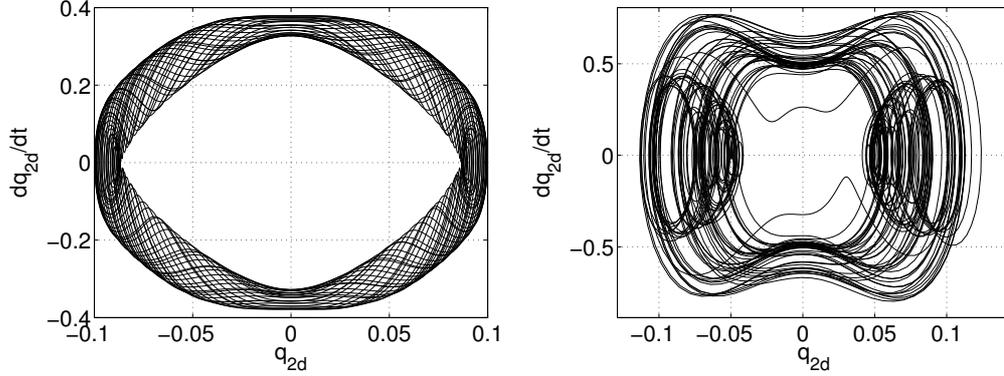


FIG. 8.13 – Profil de phase du mode antisymétrique avec  $b = 5.93$ ,  $q_{1e} = 1.39$  et  $q_{2ini} = -0.1$ . A gauche, le cas  $q_{1ini} = -0.01$  et à droite, le cas  $q_{1ini} = -0.1$ .

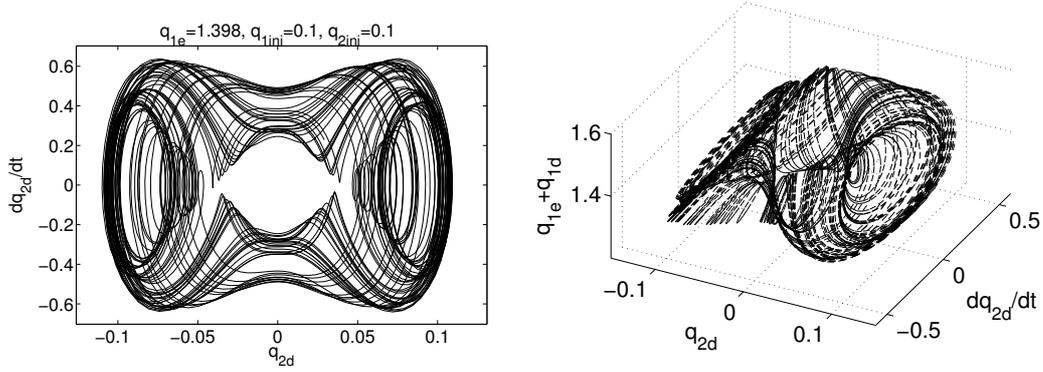


FIG. 8.14 – Profil de phase du mode antisymétrique avec  $b = 5.93$ ,  $q_{1e} = 1.398$ ,  $q_{1ini} = -0.1$  et  $q_{2ini} = -0.1$ . A gauche, le diagramme de phase de l'oscillateur antisymétrique, à droite apparaît le couplage avec l'oscillateur symétrique.

où

$$\begin{aligned} \omega_{1e}^2 &= \omega_1^2 - 2bA_{111}q_{1e} - 3B_{1111}q_{1e}^2, & \omega_{2e}^2 &= \omega_2^2 - 2bA_{122}q_{1e} - B_{1122}q_{1e}^2 \\ \alpha_1 &= -2 \frac{(bA_{111} + 3B_{1111}q_{1e})^2}{3\omega_1^2}, & \alpha_2 &= -\frac{2(2\omega_2^2 - \omega_1^2)(bA_{122} + B_{1122}q_{1e})^2}{(4\omega_2^2 - \omega_1^2)\omega_1^2} \\ \beta_1 &= -4 \frac{(bA_{111} + 3B_{1111}q_{1e})^2}{\omega_1^4}, & \beta_2 &= -4 \frac{(bA_{122} + B_{1122}q_{1e})^2}{(4\omega_2^2 - \omega_1^2)\omega_1^2} \end{aligned} \quad (8.42)$$

L'utilisation d'une méthode perturbative sur ce nouveau système donne les bonnes résonances non-linéaires. Les solutions s'écrivent :

$$R_p(t) = a \cos(\omega_{NL}t + \phi) \text{ pour } p = 1, 2 \quad (8.43)$$

où

$$\omega_{NL} = \omega_{pe}(1 + \Gamma_p a^2) \quad (8.44)$$

$$\Gamma_p = \frac{1}{8\omega_{pe}^2} (3(\alpha_p - B_{pppp}) + \omega_{pe}^2 \beta_p) \quad (8.45)$$

On y retrouve bien la dépendance en amplitude  $a$  de la pulsation, avec des coefficients fonctions des paramètres de précontrainte  $b$  et  $q_{1e}$ . Les caractères assouplissant ou raidissant des deux modes sont déterminés respectivement par le signe de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . La figure 8.15 présente ces valeurs en fonction de  $b$  et  $q_{1e}$ . On constate que le premier mode est toujours assouplissant (noté S), quelque soit son état de précontrainte. La réduction à 1 ddl du paragraphe 8.4.1 prédit le même résultat, car les coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  du changement de variables ne dépendent pas des termes de couplage. En revanche, le signe du coefficient non-linéaire du deuxième NNM  $\Gamma_2$  dépend des précontraintes.

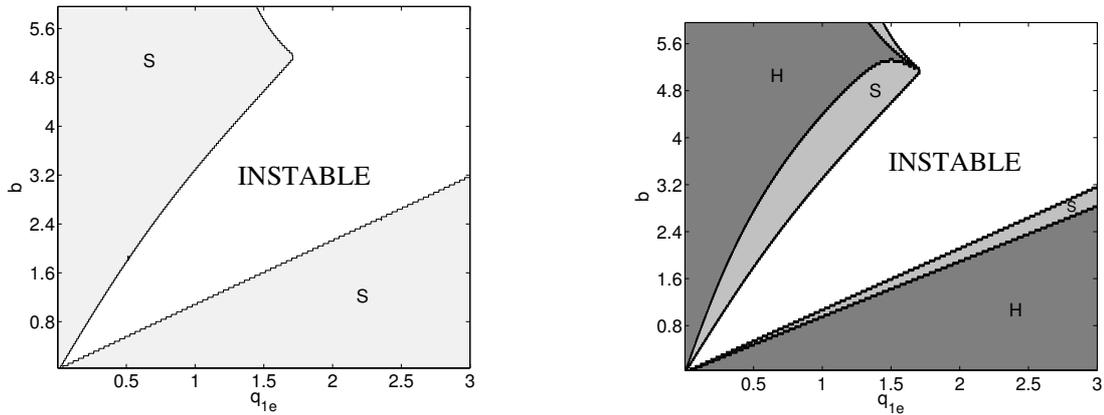


FIG. 8.15 – Comportements raidissant(H)/assouplissant(S) des deux premiers modes en fonction des deux paramètres de chargement.

## 8.5 Conclusion

Ce chapitre portait sur l'étude de la dynamique non-linéaire de systèmes précontraints. On peut retrouver ces résultats dans Mamou-Mani et al. ([49; 50; 51]). On a montré l'influence majeure des précontraintes issues d'une charge transversale, principalement lorsqu'elles mettent la structure proche d'une instabilité statique (point limite de claquage ou flambage sur un mode antisymétrique). Dans ce cas :

- l'amplitude des oscillations est plus grande que sans précontrainte à amplitude de force égale, ce qui implique que l'hypothèse de grands déplacements est plus rapidement nécessaire.
- à amplitude de déplacement donnée, la non-linéarité engendrée est plus grande.

Il reste à compléter la réduction du modèle de poutre flambée par d'autres modes propres. En effet, lors des vibrations à grande amplitude, il est possible que les deux modes que nous avons présentés soient couplés avec l'ensemble des modes de la structure. Le calcul doit passer par la quantification de ces couplages potentiels avant la réduction de modèle.

Les tables d'harmonie étant excitées par les cordes, il nous faut aussi étudier les vibrations forcées avec une excitation dynamique. L'amortissement de la table est aussi à considérer, et amènera certainement des modifications importantes dans les propriétés non-linéaires.

Ces résultats ouvrent d'ores et déjà des perspectives sur les tables d'harmonie. Le réglage du bombé initial et de la charge sont théoriquement en mesure de placer la table d'harmonie à la limite d'une instabilité statique, et ainsi lui permettre de générer des grands

déplacements. Cette configuration n'est bien-sûr pas habituelle chez les instruments, où la table d'harmonie ne vibre qu'à très faible amplitude. Le chapitre suivant va toutefois montrer qu'un tel réglage est réalisable et a des conséquences très importantes sur le son, à l'aide d'un modèle expérimental.

---

## Chapitre 9

# Expérience sur une table d'harmonie vibrant à grande amplitude

Le chapitre précédent a montré qu'une charge statique transverse sur une poutre flambée pouvait générer des grands déplacements lorsque le système s'approche d'une instabilité. Mais peut-on retrouver cet effet sur une table d'harmonie d'instrument de musique ? Une expérience préliminaire, où le son d'un prototype expérimental est obtenu pour deux conditions différentes de précontraintes, donne une première réponse à cette question.

### 9.1 Montage expérimental

On reprend le monocorde expérimental du chapitre 7, constitué d'une corde tendue liée à une table précontrainte, à l'aide un chevalet. Cette fois, on utilise ce dispositif à la manière d'un instrument de musique : la corde est frappée par une mailloche en bois et la plaque joue le rôle de table d'harmonie. Pour obtenir des sons de même hauteur, la charge statique imposée par la corde est déterminée par des sillets de hauteur variable à ses deux extrémités, sans changer la tension. En effet, plus les sillets sont placés bas, plus la composante transverse de la tension de la corde est importante. Pour contrôler la force avec laquelle la corde est excitée, la mailloche est lâchée, à la main, depuis une position prédéfinie constante.

Dans la suite, nous nous limitons à la comparaison entre les sons issus d'une vibration de la corde accordée à 315 Hz, obtenus en champ proche pour deux chargements différents de la table d'harmonie initialement flambée. Nous utilisons pour cela un microphone placé à 5 cm de la plaque (figure 9.1, droite). La différence entre les décroissances temporelles et les propriétés spectrales obtenus pour les deux valeurs du chargement statiques sont présentées.

### 9.2 Décroissance temporelle

On commence par analyser le comportement temporel du son. L'enveloppe temporelle révèle deux comportements très différents. Dans le cas où la table n'est que faiblement

---

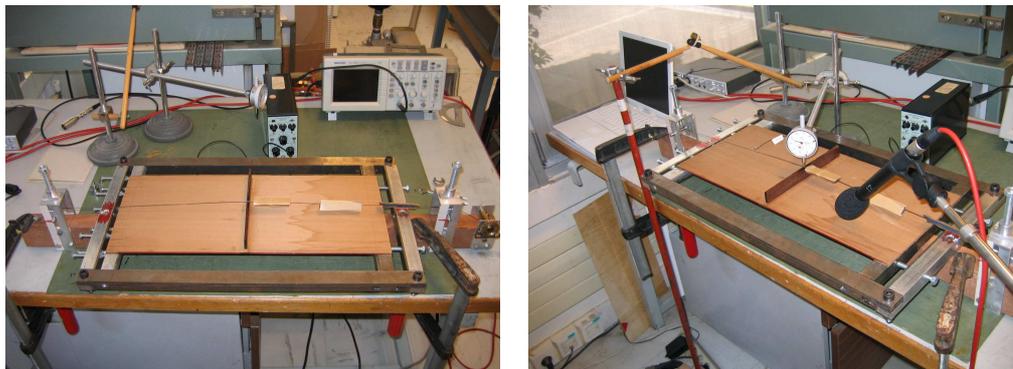


FIG. 9.1 – Photographies du montage expérimental dans l'étude du son du monocorde.

chargée ( $q = 0.4\text{mm}$ ), la caractéristique est assez classique, montrant une double décroissance logarithmique, bien connue (voir par exemple G. Weinreich [97; 98]). Dans ce cas, les vibrations de la table se font à très faible. En revanche, la table très chargée ( $q = 4\text{mm}$ ) a un comportement original. La décroissance n'est pas logarithmique jusqu'à environ une seconde de son. De plus, une modulation d'amplitude apparaît pendant la même durée. Lors de leur décroissance, les deux sons se croisent. Pendant les premières 0.25s, le niveau de pression est légèrement plus important dans le cas très chargé. Par la suite, cette tendance s'inverse. Le son obtenu avec une charge faible a un niveau supérieur, avec une différence avoisinant 5dB à environ 0.8s. Enfin, la décroissance logarithmique finale se fait avec une pente plus faible pour une charge forte.

Ces différences montrent que la charge statique a des effets considérables sur les propriétés dynamiques. Ces résultats sont maintenant complétés par une analyse spectrale.

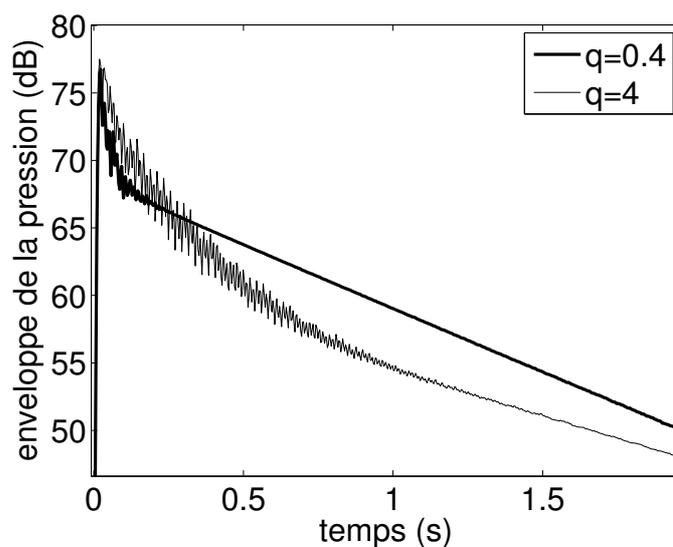


FIG. 9.2 – Enveloppe de la pression en champ proche pour deux charges transversales différentes.

### 9.3 Propriétés spectrales

Les spectrogrammes montrent des différences supplémentaires. Classiquement, le son est caractérisé par une attaque contenant un spectre large bande, puis par la résonance des modes de la corde et l'amortissement rapide des modes de table. Ce comportement est parfaitement illustré par le cas où la table est faiblement chargée (figure 9.3, gauche). Avec la charge forte (figure 9.3, droite), la durée des partiels de la corde est augmentée, le premier mode de table résonne plus longtemps et des pics supplémentaires apparaissent autour des partiels de la corde. Une transformée de Fourier, sur le signal complet, montre que ces nouvelles fréquences sont issues d'une modulation en fréquence de chaque partial. Il est de plus intéressant de constater que la modulation se fait strictement à la fréquence du premier mode de vibration de la table, valant 45 Hz. Ce phénomène s'explique donc par les grands déplacements du premier mode de la table, qui fait varier dynamiquement la tension de la corde.

Enfin, une distorsion harmonique se fait pour le premier mode de la table. On reconnaît ainsi ces harmoniques 2, 3 et 4 strictes sur les signaux 9.5.

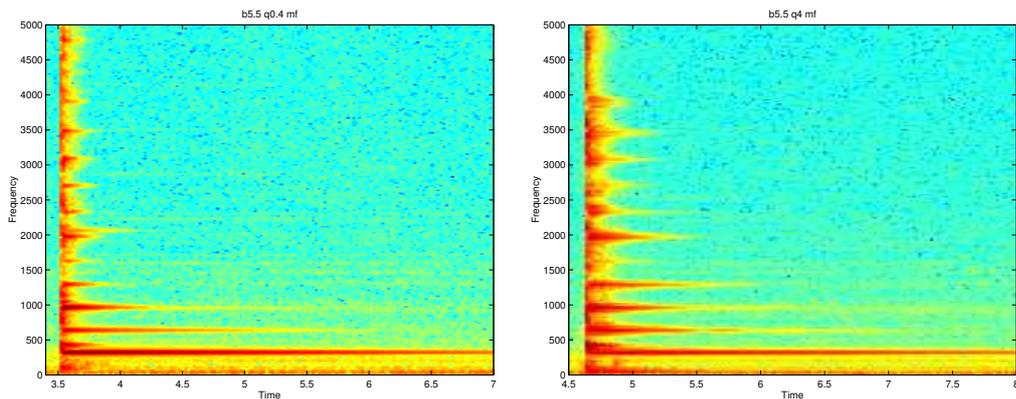


FIG. 9.3 – Spectrogramme de la pression rayonnée en champ proche (5 cm au dessus de la plaque) pour la plaque faiblement chargée (gauche) et très chargée (droite).

### 9.4 Effets de l'amplitude d'excitation

L'expérience est maintenant effectuée pour deux excitations différentes, obtenues en lâchant la mailloche depuis deux positions différentes. Les spectres des pressions obtenues pour ces deux excitations et deux charges de la corde sont analysés.

Le cas où la chargement statique de la corde est faible est présenté figure 9.6. Il ne présente aucune sensibilité à l'intensité du choc. Pour les deux amplitudes d'excitation, les spectres sont les mêmes. On y reconnaît des pics correspondant principalement aux modes de la corde mais aussi certains modes de table.

Le cas où la charge de la corde est forte présente au contraire une dépendance importante à l'intensité (figure 9.7). Les deux spectres présentent toujours des pics aux partiels de la corde mais les modulations présentées aux paragraphes précédents s'avèrent être peu présents à faible intensité et beaucoup plus à grande intensité.

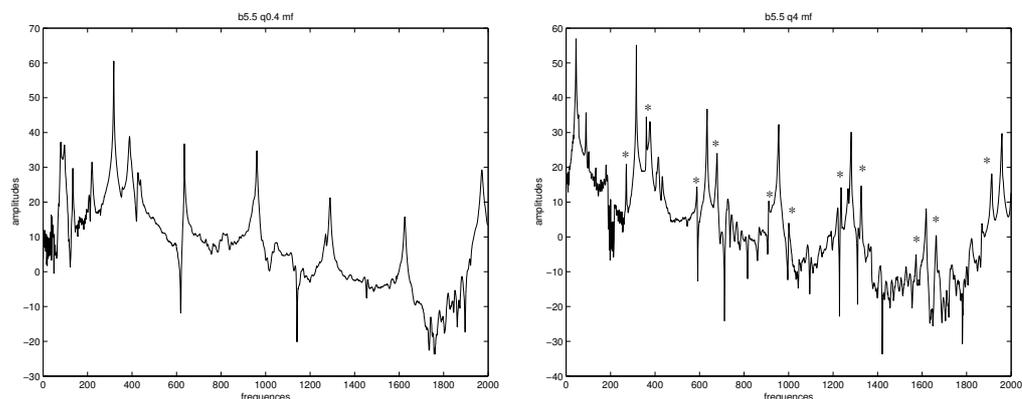


FIG. 9.4 – Spectre de la pression rayonnée en champ proche par la plaque faiblement chargée (gauche) et très chargée (droite). Les \* représentent les premières fréquences produites par la modulation de fréquence, obtenues seulement pour la plaque très chargée.

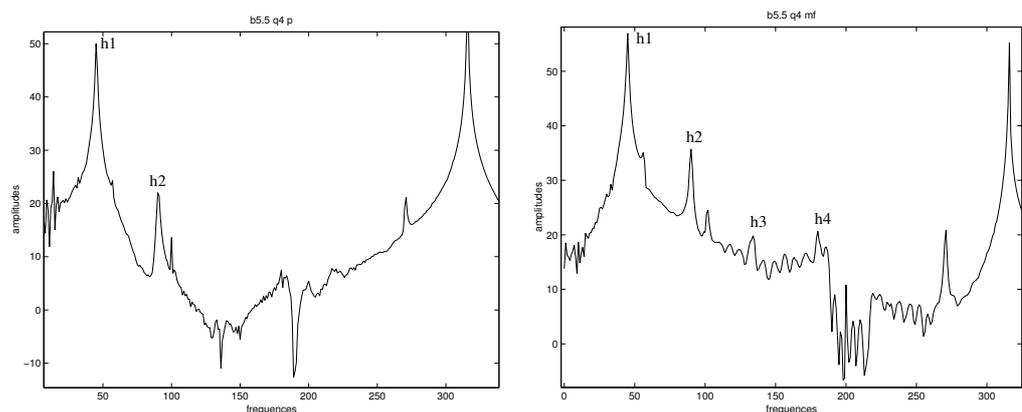


FIG. 9.5 – Spectre de la pression rayonnée en champ proche par la plaque fortement chargée pour une excitation d'intensité faible (gauche) et grande (droite). Ces figures montrent l'apparition des harmoniques 2, 3 et 4 (resp. h2, h3 et h4) avec l'intensité.

## 9.5 Conclusion

Cette expérience a montré les effets de la charge des cordes à partir d'un instrument à corde très simplifié. La charge statique imposée par une corde sur la table d'harmonie a des conséquences importantes sur le son. Lorsque cette charge est faible, c'est-à-dire que la table oscille loin de toute instabilité, le son offre les propriétés traditionnelles d'un son de piano. En revanche, lorsque la charge est forte, ou plus précisément que la table vibre proche d'une instabilité, des grands déplacements sont générés et des caractéristiques des systèmes non-linéaires sont observés comme la sensibilité aux conditions initiales ou l'enrichissement harmonique.

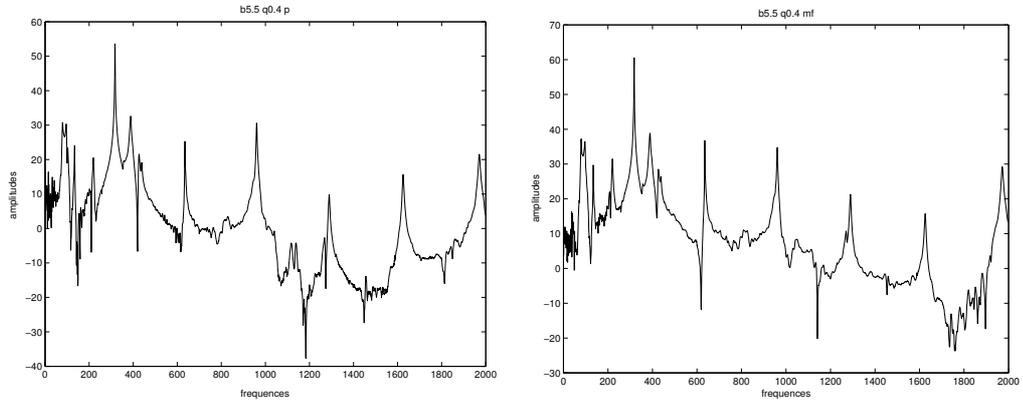


FIG. 9.6 – Spectre de la pression rayonnée en champ proche par la plaque faiblement chargée pour une excitation d'intensité faible (gauche) et grande (droite).

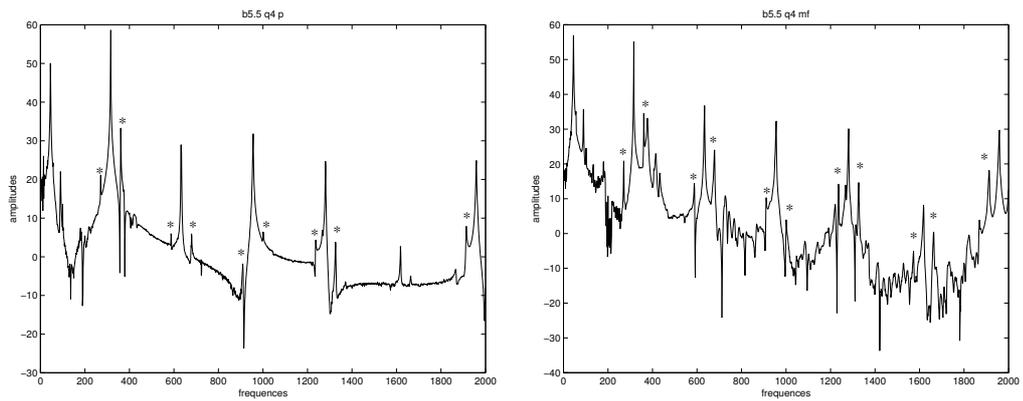


FIG. 9.7 – Spectre de la pression rayonnée en champ proche par la plaque fortement chargée pour une excitation d'intensité faible (gauche) et grande (droite). L'amplitude des fréquences produites par modulation (\*) augmente avec l'intensité.



## Chapitre 10

# Conclusion et perspectives

### 10.1 Conclusion

Le travail effectué lors de cette thèse a été consacré à la modélisation de tables d'harmonie du piano incluant le savoir-faire, et ceci grâce à la prise en compte des précontraintes induites par les fabricants.

Du point de vue mécanique, le problème s'est alors posé en terme de la relation entre l'état statique et les propriétés vibratoires de la table d'harmonie. Nous avons montré que, lorsque la charge des cordes est uniformément répartie sur les chevalets, le carré des pulsations propres de la table d'harmonie est une fonction quadratique du chargement en déplacements. Les coefficients de cette fonction dépendent du bombé initial de la table. Nous obtenons alors pour certains bombés une augmentation des fréquences de pulsation, pour d'autres une diminution. Un des réglages utilisés par les fabricants semble être un cas mixte, commençant par une diminution suivie d'une augmentation des fréquences.

Cette loi quadratique a été expliquée par des grands déplacements lors du chargement statique, tout d'abord à partir du modèle numérique puis à l'aide de modèles analytiques à petit nombre de degrés de liberté. Une autre caractéristique a toutefois émergée sur ces modèles simples : la mise sous précontraintes peut induire des instabilités pour certains chargements. Ceci a conduit à étudier l'influence du chargement statique sur les propriétés vibratoires non-linéaires. Il est alors apparu que, lorsque les systèmes s'approchaient de leurs instabilités statiques, ils devenaient « plus non-linéaires », c'est-à-dire qu'une même condition initiale des vibrations engendrait une amplitude vibratoire et donc des propriétés non-linéaires augmentant jusqu'à l'instabilité.

Ces résultats théoriques ont été observés expérimentalement à l'aide d'un prototype de monocorde précontraint. En particulier, certaines conditions de réglage ont permis d'obtenir une table d'harmonie vibrant en grands déplacements, ce qui a des conséquences très importantes sur le son. Bien que caricaturaux, ces réglages montrent l'étendue des possibilités qui s'offrent aux fabricants.

### 10.2 Perspectives

La modélisation mécanique a trouvé ici une application sur la compréhension des savoir-faire de fabrication. Tous les modèles présentés peuvent être encore améliorés. Un modèle éléments finis de table encore plus réaliste serait par exemple utilisable directement par l'ingénieur. L'analyse complète des modes d'une poutre flambée permettrait d'évaluer les

---

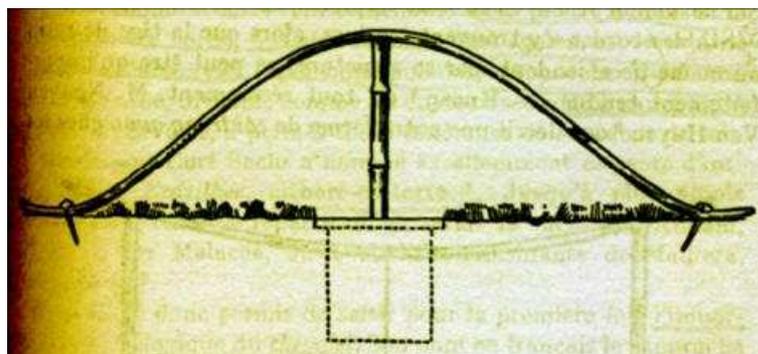


FIG. 10.1 – Cithare en terre, d'après A. Schaeffner [78]

effets de la charge transversale sur d'autres termes de couplage.

Ces différentes améliorations ne résoudront pas la problématique fondamentale de la modélisation des savoir-faire. Afin d'y parvenir, ces travaux doivent être complétés d'une part par la modélisation mécanique d'éléments du savoir-faire, qui ne soient pas liés à des précontraintes. Il faudra de plus les associer à d'autres approches, dont voici quelques propositions :

- l'approche *technologique* (voir Lafitte [45] et Simondon [81]). « Si l'étude de la construction des machines de tous ordres doivent beaucoup aux démarches nécessaires de la mécanique et de la physico-chimie, la mécanologie, science des machines, science des corps organisés construits par l'homme, n'est cependant pas une partie de ces sciences. » [45] La fabrication des instruments de musique est contrainte par certaines logiques et dialectiques internes à l'instrument. Certaines structures stables émergent à travers l'histoire et les familles instrumentales. Ainsi, on retrouve le réglage de la charge des cordes chez tous les instruments possédant un chevalet, même dans un instrument aussi simple que la cithare en terre présentée figure 10.1. Trouver ces structures donnerait un cadre pertinent à la modélisation des savoir-faire.
- l'approche *historique*, voir Gille [30] et Daumas [18] pour un panorama général. La facture et les réglages des instruments s'inscrivent dans l'Histoire et ses systèmes techniques. A la fois révélateurs et contraints par l'époque, les procédés de fabrication sont en perpétuelle évolution ( voir les processus de rationalisation exprimés par M. Weber [96]). L'organologie, comme étude des instruments de musique, a donné de nombreuses explications dans ce domaine.
- l'approche *cognitive*. La recherche de qualité est la visée principale des techniques de fabrication. Le goût des musiciens et des fabricants est bien-sûr propre à chacun. L'extrême fiabilité de leurs jugements et de la compréhension entre un musicien et son facteur révèle toutefois des représentations mentales stables et partagées par ces experts. L'approche cognitive vise à expliciter ces représentations, par exemple par l'analyse du discours effectué lors d'une tâche de qualification d'un son instrumental (d'après P. Cheminée [13]). Un travail en cours porte sur les effets du réglage de la charge des cordes sur la qualité perçue, à partir de cet espace de représentation [14].

La modélisation des savoir-faire des fabricants d'instruments de musique n'en est donc qu'à ses débuts !

---

## Chapitre 11

### Annexe 1

#### 11.1 Modes de la plaque plate comparés à un calcul numérique

##### 11.1.1 Modes observés numériquement et expérimentalement

La première étape consiste à déterminer les modes propres de la table plate, soumise à aucun chargement. Pour cela on utilise la NAH, avec une résolution de 1920 points (16 expériences de 120 microphones). Ces modes sont comparés à un calcul éléments finis aux propriétés calquées sur l'expérience :

- un modèle de plaque en éléments finis a été modélisé avec le logiciel *CAST3M*. Le maillage est constitué de 451 noeuds avec des éléments coque de type Love-Kirchhoff (see [5]).
- *propriétés géométriques* : La plaque a une longueur de 47cm et une largeur de 21.8cm pour une épaisseur de 4mm.
- *propriétés mécaniques* : Les modules d'élasticité et la densité sont celles de la plaque expérimentale : masse volumique :  $\rho = 416kg/m^3$ , modules d'Young  $E_1 = 1.32.10^{10}Pa$ ,  $E_2 = 6.03.10^8Pa$  ; Les autres valeurs ont été évaluées à partir de données classiques :  $G_{12} = 6.10^8Pa$ , coefficient de Poisson  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $i = 1$  : direction dans le sens des fibres ;  $i = 2$  : direction perpendiculaire aux fibres.
- *conditions aux limites* : A la manière du montage expérimental, les deux côtés dans la longueur sont libres et les deux autres sont encastés (modèle grossier du collage).

La comparaison numérique-expérimental montre un très bon accord pour les déformées et les fréquences modales. Toutefois, les déformées modales diffèrent sensiblement pour les zones proches des bords libres. L'expérience montre des zones nodales à ces bords alors que le modèle prédit des ventres à ces endroits. Ces différences s'expliquent par le calcul de reconstruction du champs de vitesse expérimental. En effet, le filtrage des nombres d'ondes élevés, caractéristiques du bruit expérimental, filtre aussi les informations nécessaires pour les conditions libres du bord de la plaque.

La comparaison des fréquences propres montre aussi des différences notables. Un deuxième calcul numérique avec cette fois des conditions d'appui simple à la place des encastements montrent que les valeurs expérimentales sont bien encadrées par ces deux modèles. Ceci tend à prouver que les collages des bords expérimentaux ne sont pas parfaitement des encastements et que les conditions réelles se situent entre ces deux cas simples.

---

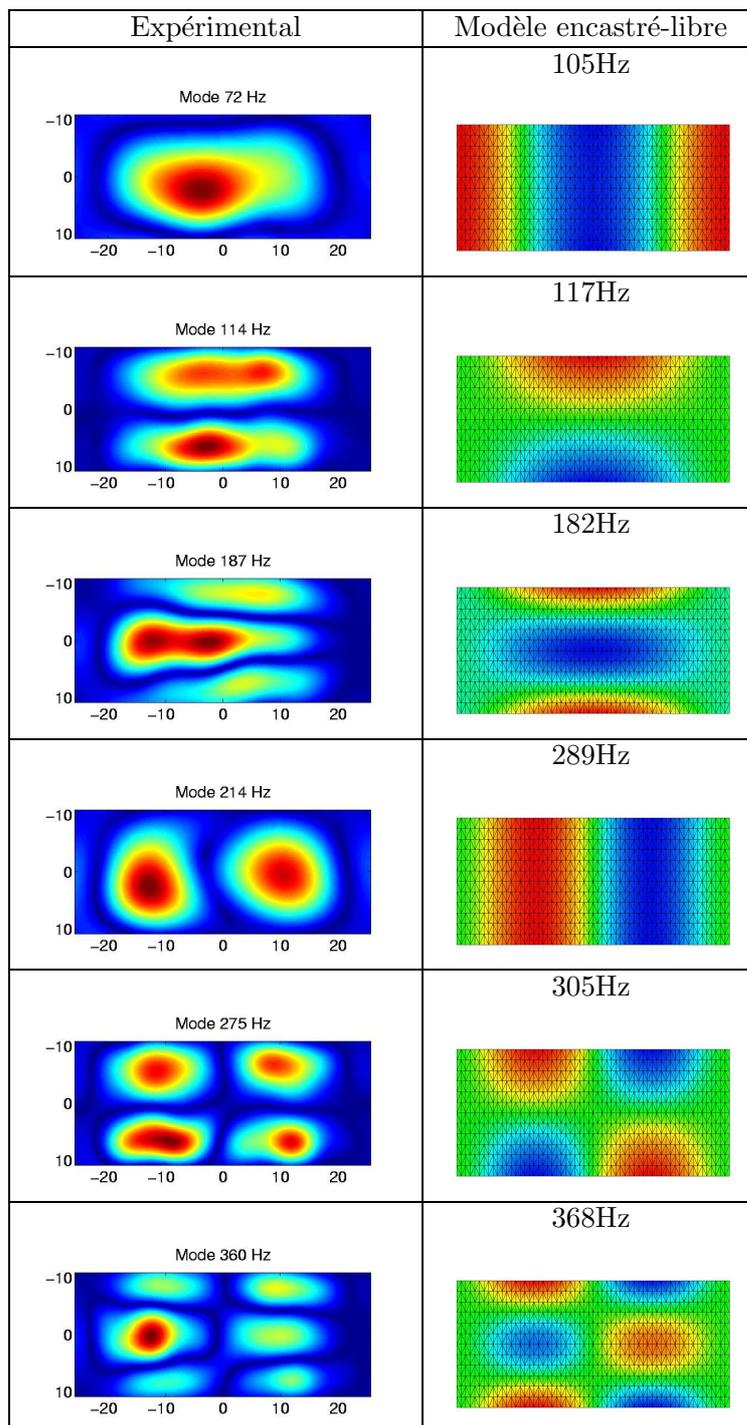


FIG. 11.1 – 6 premiers modes propres expérimentaux et modélisés par éléments finis avec des conditions aux limites encastrées-libres et appuyées-libres.

### 11.1.2 Modes n'étant pas observés expérimentalement

Certains modes numériques n'ont pas été observés expérimentalement. Ils sont présentés figure 11.5. Nous n'avons pas d'explication mais ils proviennent certainement de

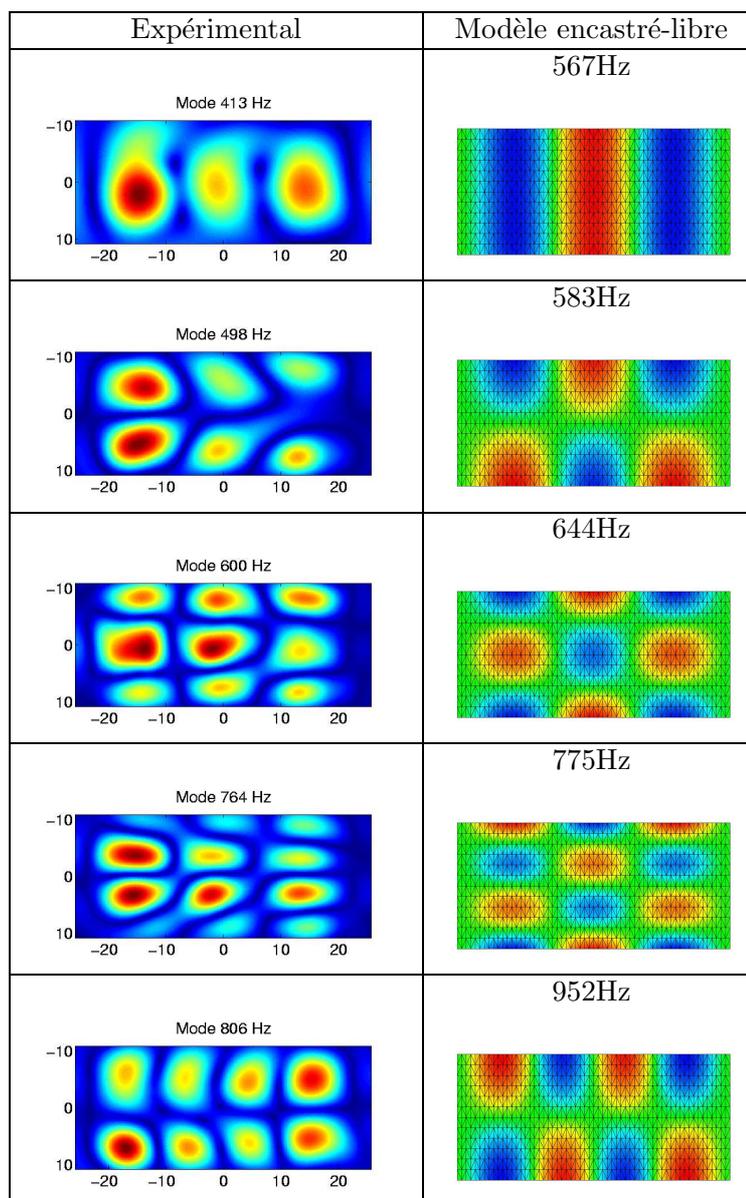


FIG. 11.2 – Modes propres 7 à 11 expérimentaux et modélisés par éléments finis avec des conditions aux limites encastrées-libres et appuyées-libres.

limitations dans la méthode expérimentale.

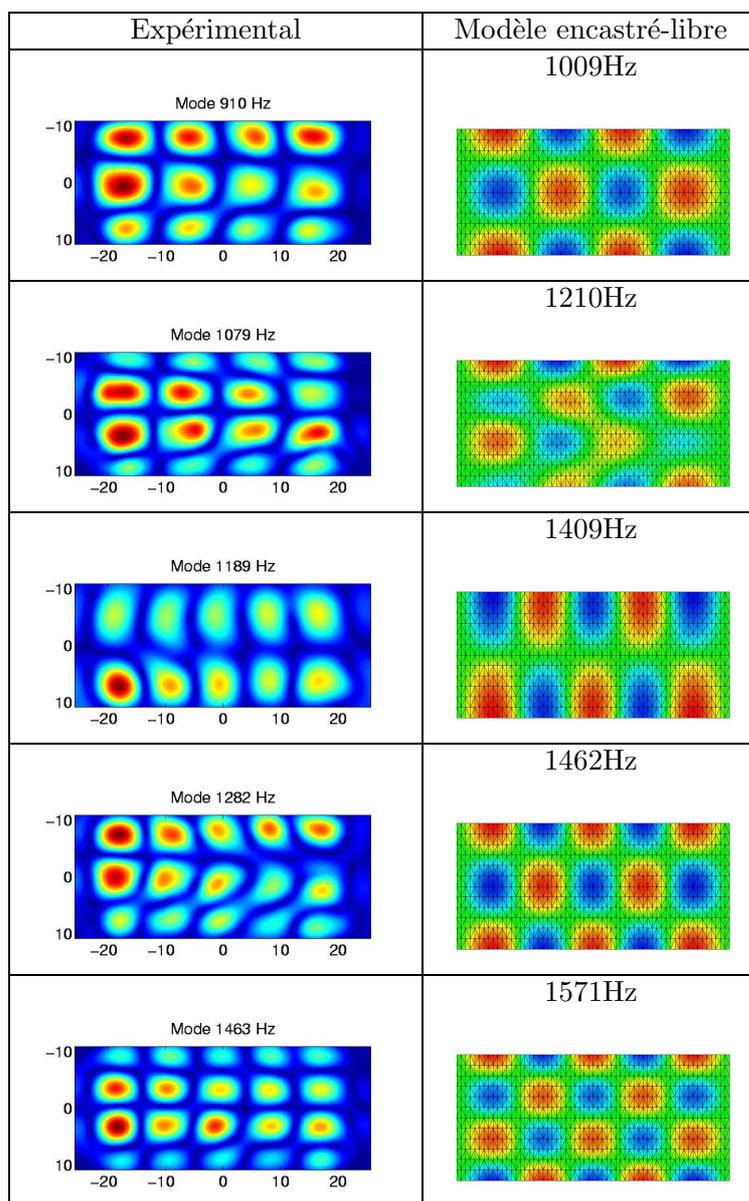


FIG. 11.3 – Modes propres 11 à 15 expérimentaux et modélisés par éléments finis avec des conditions aux limites encastrées-libres et appuyées-libres.

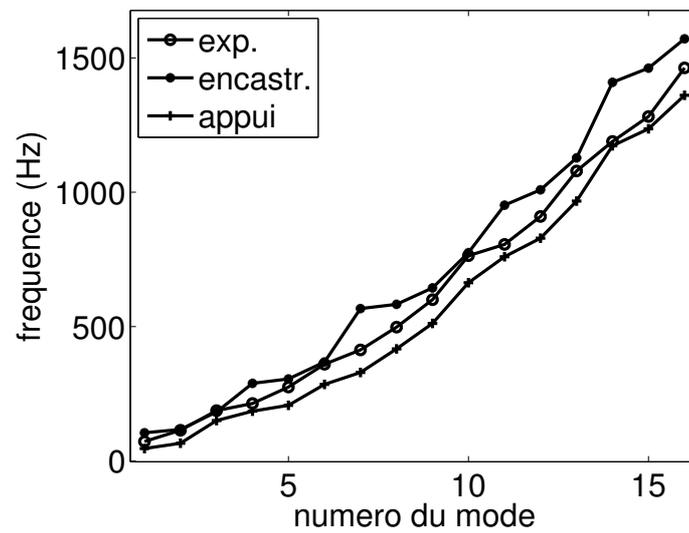


FIG. 11.4 – Fréquences propres de la table mesurées expérimentalement et calculées numériquement par des modèles libre-encastré et libre-appuyé.

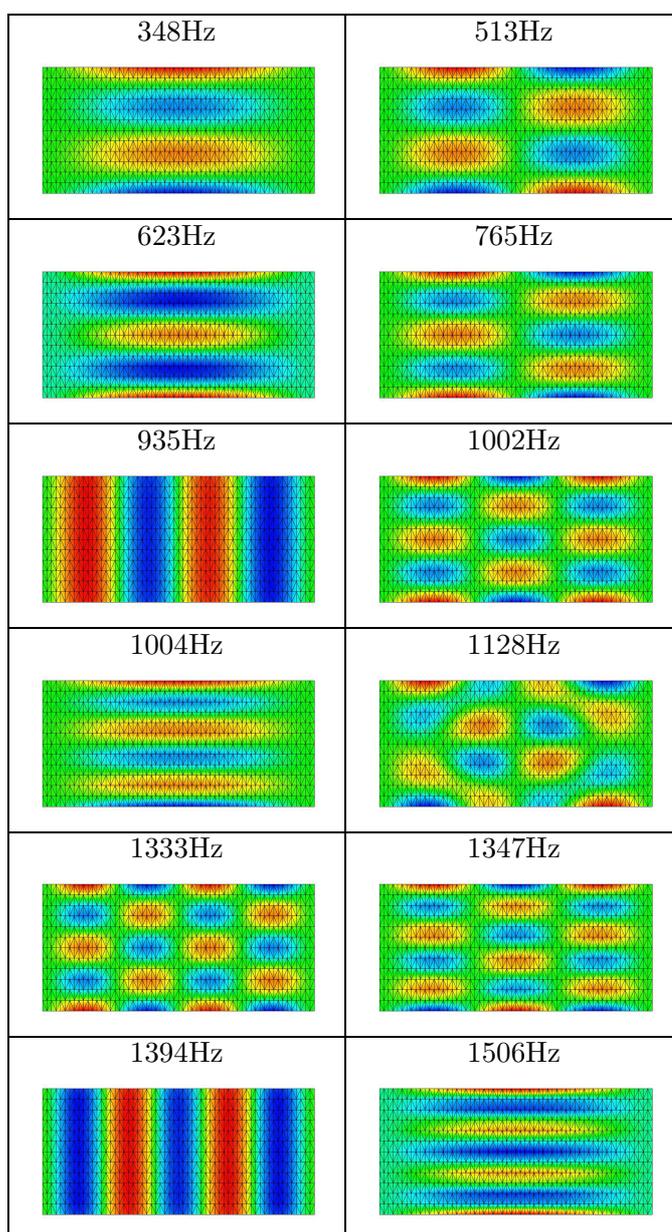


FIG. 11.5 – Modes calculés numériquement mais non observés expérimentalement.

## Chapitre 12

### Annexe 2

#### 12.1 Evolution des fréquences de vibration de la plaque flambée sous chargement transversal : cas où $b = 2.31$

La figure 12.1 montre que les fréquences propres décroissent pour le type de chargements appliqués.

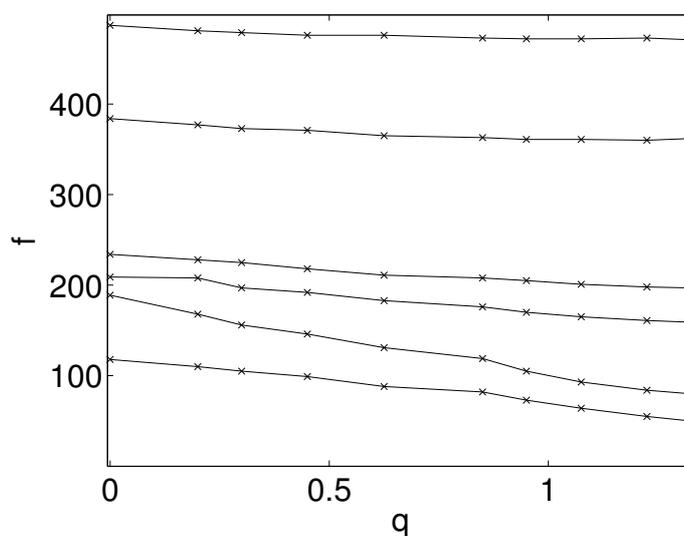


FIG. 12.1 – Effets de la charge transversale due à la corde sur les fréquences de vibrations de la plaque flambée, dans le cas où la flèche initiale normée par l'épaisseur  $b = 2.31$

L'interpolation quadratique de la figure 12.2 donne des résultats très satisfaisants.

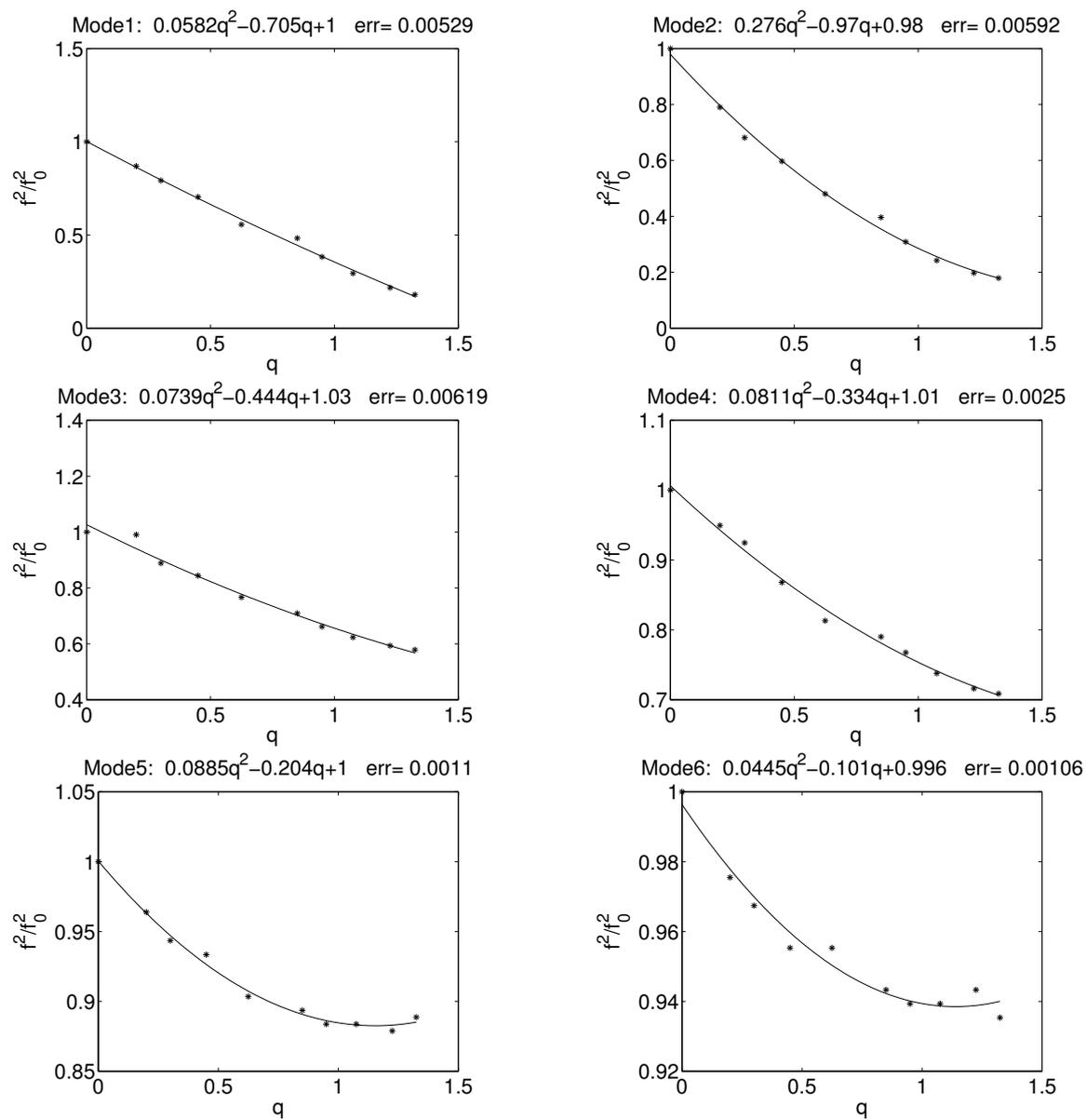


FIG. 12.2 – Résultats expérimentaux des six premières fréquences propres mesurées d'une plaque flambée soumise à une charge statique transversale pour une flèche au centre initiale de 9.20mm ( $b = 2.31$ )

## Table des figures

3.1	Efforts exercés par les cordes du violon. La tension d'une corde se traduit par les efforts $T_1$ et $T_2$ sur le chevalet et sur la caisse . . . . .	15
3.2	Exemple de réglage de la charge du piano à l'aide d'une plate-forme, d'après [77] . . . . .	16
3.3	Efforts exercés par les cordes du clavecin au chevalet. Pour une agraffe simple, le chargement est principalement vertical. Pour une agraffe avec contre-pointe, la différence de direction des efforts implique un moment. . .	17
3.4	Exemple de forçage de la barre du violon, d'après [38] . . . . .	19
3.5	Exemple de bombé initial du piano droit. Les pointillés représentent la forme des barres. Le $\square$ représente le point le plus haut. (d'après [23]) . . . . .	19
3.6	Schémas simplifiés de la mise en « bombé » et en « charge » de la table d'harmonie du piano . . . . .	20
4.1	Différentes étapes de la vibration d'une structure précontrainte. . . . .	25
5.1	Photographies de la table d'harmonie du piano IBACH modélisé par la suite.	37
5.2	Stabilisation du maillage à partir de la convergence des 7 premières fréquences propres. . . . .	38
5.3	Déformées des deux premiers modes de vibration de la table d'harmonie plate en appui simple sur son bord. . . . .	38
5.4	Déformées des modes de vibration 3 et 4 de la table d'harmonie plate en appui simple sur son bord. . . . .	39
5.5	Déformées des modes de vibration 5 et 6 de la table d'harmonie plate en appui simple sur son bord. . . . .	39
5.6	Evolution des fréquences propres avec le niveau de bombé (une flèche de 1 correspond à un rayon de courbure de 56m). . . . .	41
5.7	Déformée du mode 1 au point B (flèche maximale égale à 4 fois l'épaisseur) et différence relative entre les déformées du mode 1 au point A et au point B.	42
5.8	Déformée du mode 2 au point C (flèche maximale égale à 8 fois l'épaisseur) et différence relative entre la déformée du mode 1 au point A et du mode 2 au point C. . . . .	42
5.9	Exemple d'évolution des fréquences propres avec le chargement transverse pour un bombé valant l'épaisseur de la plaque avec des précontraintes linéarisées (pointillés) et non-linéaires (traits pleins). La figure de droite montre un zoom sur la première fréquence. . . . .	43
5.10	Effet du bombé initial sur les différences de valeurs de la première fréquence propre entre un modèle linéaire et un modèle non-linéaire. . . . .	43

5.11	Premier mode de vibration d'une table plate avec un paramètre de chargement de 5.88mm avec un modèle linéaire (gauche) et non-linéaire (droite).	44
5.12	Différences relatives entre les géométries calculées avec des modèles linéaire et non-linéaire du premier mode d'une table sans bombé initial avec un paramètre de chargement transverse de 5.88mm (gauche) et 14.7mm (droite).	44
5.13	Effets de la charge transverse sur une table initialement plate (gauche) et avec un bombé de deux fois l'épaisseur (droite).	45
5.14	Effets du bombé sur les coefficients linéaire $k_1$ et quadratique $k_2$ .	47
5.15	Mobilités en un point proche du milieu du grand chevalet, d'une table initialement plate subissant une charge transverse et zoom. Les fréquences des pics augmentent avec la charge transverse.	48
5.16	Mobilités en un point proche du milieu du grand chevalet, d'une table avec un bombé initial de deux fois l'épaisseur, subissant une charge transverse et zoom. Les fréquences des pics diminuent avec la charge transverse.	48
5.17	Changements progressifs de forme de table en relation avec l'évolution de la première fréquence propre pour un bombé valant l'épaisseur de la plaque.	50
6.1	Exemple d'évolution du carré des trois premières pulsations d'une corde avec la précontrainte.	53
6.2	Exemple d'évolution du carré des trois premières pulsations d'une poutre avec la précontrainte.	54
6.3	Système de deux barres et une masse ponctuelle.	55
6.4	Relation entre la force et le déplacement du portique en grands déplacements.	56
6.5	Evolution de la pulsation avec la précontrainte.	57
6.6	Comparaison entre le portique non-linéaire et linéarisé.	58
6.7	Schéma d'une poutre encastree-encastree soumise à une charge axiale.	59
6.8	Evolution des quatre premières fréquences propres d'une poutre flambée avec la charge axiale.	61
6.9	Déformée du premier mode de vibration pour $b = 0.1$ (gauche) et $b = 5$ (droite).	62
6.10	Déformée du deuxième mode quelque soit la valeur de $b$ .	62
6.11	Evolution des carrés des deux premières fréquences propres dans l'espace des deux paramètres de précontraintes. Mode symétrique (gauche, exemples de déformées à la figure 6.9) et antisymétrique (droite, déformée de la figure 6.10).	64
6.12	Comparaison analytique/numérique des effets de la charge transverse $q_{1e}$ sur les pulsations propre du premier mode symétrique (gauche) et antisymétrique (droite), cas $b=1.84$ .	65
6.13	Comparaison analytique/numérique des effets de la charge transverse $q_{1e}$ sur les pulsations propres du premier mode symétrique (gauche) et antisymétrique (droite), cas $b=5.93$ .	66
7.1	Dispositif expérimental contenant une plaque et un chevalet chargés par une corde tendue et un chargement dans le plan à l'aide de vis de réglage.	68
7.2	Liaisons associées à l'assemblage de la plaque dans le cadre. Seule la glissière sera utilisée dans la suite.	68
7.3	Schéma synoptique de la reconstruction holographique, d'après F. Ollivier et S. Le Moyne [65].	70

7.4	Expérience NAH. La plaque est excitée par un marteau et les microphones mesurent la pression rayonnée à 25 mm au dessus de la plaque. . . . .	71
7.5	Exemple de spectre moyenné expérimental et de deux déformées modales mesurées. . . . .	71
7.6	Effets de la charge dans le plan sur les fréquences de vibrations de la plaque.	72
7.7	Effet de la charge transversale sur la forme de la plaque flambée. A gauche, la charge est nulle, le chevalet est horizontale. A droite, la charge est assez grande pour faire basculer le chevalet. . . . .	72
7.8	Effets de la charge transversale due à la corde sur les fréquences de vibrations de la plaque flambée, dans le cas où la flèche initiale vaut 5.5mm (c'est-à-dire $b = 1.38$ ). . . . .	73
7.9	Résultats expérimentaux des six premières fréquences propres mesurées d'une plaque flambée soumise à une charge statique transversale pour une flèche au centre initiale de 5.5 mm ( $b = 1.38$ ). . . . .	74
7.10	Evolution des fréquences propres de la table calculées numériquement, sous l'effet d'un chargement dans la plan normalisé par le déplacement de flambage.	75
7.11	Relation force-déplacement au chevalet. La figure de droite est un zoom faisant apparaître le double cycle d'hystérésis dû au défaut initial de basculement. . . . .	76
7.12	Déplacements des deux extrémités du chevalet en fonction du déplacement du milieu du chevalet. Le double cycle d'hystérésis se retrouve dans les deux « claquages », vus par l'évolution du déplacement de chaque extrémité du chevalet. . . . .	76
7.13	Evolution des premières fréquences propres avec la charge statique transversale. . . . .	77
7.14	Différences entre un modèle non-linéaire avec défaut (-) et non-linéaire sans défaut (—, gauche) et linéarisé (—, droite). . . . .	77
8.1	Vitesse du portique sans précontrainte ( $x_0 = 0$ ) avec un déplacement initial $x_{ini} = 0.1$ et une vitesse initiale $\dot{x}_{ini} = 0$ , et son diagramme de phase. . . . .	87
8.2	Vitesse du portique pour une précontrainte $x_0 = -0.321$ avec un déplacement initial $x_{ini} = 0.1$ et une vitesse initiale $\dot{x}_{ini} = 0$ , et son diagramme de phase. . . . .	88
8.3	Profil de phase pour plusieurs valeurs de précontrainte $x_0$ pour une condition initiale $x_{ini} = 0.1$ . En pointillé est tracée la valeur de $(x_{ini} \times \omega)$ , modélisant le lieu des extrema de vitesse. . . . .	88
8.4	Exemples de claquages dynamiques : profils de phase pour $x_0 = -0.3$ et $x_0 = -0.4$ pour une condition initiale $x_{ini} = 0.1$ . . . . .	89
8.5	A gauche, évolution de la valeur absolue du coefficient de non linéarité $\alpha_{bc}$ avec le déplacement statique $x_0^*$ . A droite, 3 exemples de résonance non-linéaire. . . . .	91
8.6	Evolution de l'enrichissement en harmonique 2 avec le déplacement statique initial $x_0$ , pour une amplitude de déplacement $\varepsilon a = 1$ . . . . .	92
8.7	Rapport entre le coefficient effectif de non-linéarité (gauche) et l'enrichissement en harmonique 2 (droite) du système précontraint et ceux du système de même géométrie sans précontrainte. . . . .	93
8.8	Exemples de déformées des deux premiers modes de vibration d'une poutre flambée (voir chapitre 6 pour plus de détails). . . . .	94

8.9	Profil de phase pour plusieurs valeurs de précontrainte $q_{1e}$ pour une flèche initiale $b = 1.84$ et une condition initiale $q_{1dini} = -0.1$ , dans le cas où $q_{2d} = 0$ .	95
8.10	Profil de phase du mode symétrique avec $b = 1.84$ , $q_{1e} = 0$ et $q_{1ini} = -0.1$ pour plusieurs valeurs de la condition initiale sur le second mode $q_{2ini} = -0.01, -0.1$ et $-0.2$ .	96
8.11	Profil de phase du mode symétrique avec $b = 1.84$ , $q_{1e} = 0.36$ et $q_{1ini} = -0.1$ pour plusieurs valeurs de la condition initiale sur le second mode $q_{2ini} = -0.01, -0.1$ et $-0.2$ .	97
8.12	Profil de phase du mode antisymétrique avec $b = 1.84$ , $q_{1e} = 0.36$ et $q_{2ini} = -0.1$ pour plusieurs valeurs de la condition initiale sur le second mode $q_{1ini} = -0.01$ et $-0.1$ .	97
8.13	Profil de phase du mode antisymétrique avec $b = 5.93$ , $q_{1e} = 1.39$ et $q_{2ini} = -0.1$ . A gauche, le cas $q_{1ini} = -0.01$ et à droite, le cas $q_{1ini} = -0.1$ .	98
8.14	Profil de phase du mode antisymétrique avec $b = 5.93$ , $q_{1e} = 1.398$ , $q_{1ini} = -0.1$ et $q_{2ini} = -0.1$ . A gauche, le diagramme de phase de l'oscillateur antisymétrique, à droite apparaît le couplage avec l'oscillateur symétrique.	98
8.15	Comportements raidissant(H)/assouplissant(S) des deux premiers modes en fonction des deux paramètres de chargement.	99
9.1	Photographies du montage expérimental dans l'étude du son du monocorde.	102
9.2	Enveloppe de la pression en champ proche pour deux charges transversales différentes.	102
9.3	Spectrogramme de la pression rayonnée en champ proche (5 cm au dessus de la plaque) pour la plaque faiblement chargée (gauche) et très chargée (droite).	103
9.4	Spectre de la pression rayonnée en champ proche par la plaque faiblement chargée (gauche) et très chargée (droite). Les * représentent les premières fréquences produites par la modulation de fréquence, obtenues seulement pour la plaque très chargée.	104
9.5	Spectre de la pression rayonnée en champ proche par la plaque fortement chargée pour une excitation d'intensité faible (gauche) et grande (droite). Ces figures montrent l'apparition des harmoniques 2, 3 et 4 (resp. h2, h3 et h4) avec l'intensité.	104
9.6	Spectre de la pression rayonnée en champ proche par la plaque faiblement chargée pour une excitation d'intensité faible (gauche) et grande (droite).	105
9.7	Spectre de la pression rayonnée en champ proche par la plaque fortement chargée pour une excitation d'intensité faible (gauche) et grande (droite). L'amplitude des fréquences produites par modulation (*) augmente avec l'intensité.	105
10.1	Cithare en terre, d'après A. Schaeffner [78]	108
11.1	6 premiers modes propres expérimentaux et modélisés par éléments finis avec des conditions aux limites encastées-libres et appuyées-libres.	110
11.2	Modes propres 7 à 11 expérimentaux et modélisés par éléments finis avec des conditions aux limites encastées-libres et appuyées-libres.	111
11.3	Modes propres 11 à 15 expérimentaux et modélisés par éléments finis avec des conditions aux limites encastées-libres et appuyées-libres.	112

---

11.4	Fréquences propres de la table mesurées expérimentalement et calculées numériquement par des modèles libre-encasté et libre-appuyé. . . . .	113
11.5	Modes calculés numériquement mais non observés expérimentalement. . . .	114
12.1	Effets de la charge transverse due à la corde sur les fréquences de vibrations de la plaque flambée, dans le cas où la flèche initiale normée par l'épaisseur $b = 2.31$ . . . . .	115
12.2	Résultats expérimentaux des six premières fréquences propres mesurées d'une plaque flambée soumise à une charge statique transversale pour une flèche au centre initiale de 9.20mm ( $b = 2.31$ ) . . . . .	116

---



## Liste des tableaux

5.1	Fréquences propres (en Hz) mesurées dans la littérature à partir d'une analyse modale sur un piano. . . . .	34
5.2	Propriétés mécaniques de l'épicéa d'après [6]. . . . .	37
5.3	Fréquences des sept premiers modes selon les conditions aux limites. . . . .	39
5.4	Interpolation quadratique pour les sept premiers modes de la table initialement plate. . . . .	45
5.5	Interpolation quadratique pour les sept premiers modes de la table avec un bombé valant l'épaisseur de la plaque. . . . .	46
5.6	Interpolation quadratique pour les sept premiers modes de la table avec un bombé valant deux fois l'épaisseur de la plaque. . . . .	46
5.7	Interpolation quadratique pour les sept premiers modes de la table avec un bombé valant trois fois l'épaisseur de la plaque. . . . .	46

---



## Bibliographie

- [1] P. Altenburger. *Manuel de Lutherie à l'Usage des Amateurs, violon, alto, violoncelle*. H. Vial, 1999.
  - [2] Aristote. *La Physique*. Librairie philosophique J. Vrin, 2002.
  - [3] A. Askenfelt. Introduction. *Five lectures on the acoustics of the piano, ed. by Anders Askenfelt*, 1990.
  - [4] S. Baguet and B. Cochelin. On the behaviour of the ANM continuation in the presence of bifurcations. *Commun. Numer. Meth. Engng*, 19 :459–471, 2003.
  - [5] J.-L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermès, 1990.
  - [6] J. Berthaut, M. Ichchou, and L. Jezequel. Piano soundboard : structural behaviour, numerical and experimental study in the modal range. *App. Acoust.*, 64 :1113–1136, 2003.
  - [7] C. Besnainou. The sound qualities of string instruments : a new approach by body's non-linearities. *Proc. of ISMA*, 2001.
  - [8] H. Bilhuber and C. A. Johnson. The influence of the soundboard on the piano tone quality. *J. Acoust. Soc. Am*, 11 :311–320, 1940.
  - [9] A. Boudaoud, P. Patrício, Y. Couder, and M. Ben Amar. Dynamics of singularities in a constrained elastic plate. *Nature*, 407 :718–720, 2000.
  - [10] R. Bresson, F. Conti, and C. Barrois. Modélisation d'une table d'harmonie de piano sous castem. *Stage de l'ENPC*, 2006.
  - [11] A. Caracciolo. *Transferts d'énergie dans les plaques : application à la table d'harmonie*. Doctorat de l'Université Paris 6, 1995.
  - [12] A. Chaigne, C. Touzé, and O. Thomas. Nonlinear axisymmetric vibrations of gongs. *Proc. of ISMA*, 2001.
  - [13] P. Cheminée. Analyse lexicologique d'une enquête sur les pianos au laboratoire d'acoustique musicale. *Séminaire de l'Atelier Piano, LAM*, 2004.
  - [14] P. Cheminée. Analyse de discours. expertise par des pianistes et des facteurs de trois variations de charges sur un piano à queue. *Rapport interne, LAM*, 2007.
-

- 
- [15] B. Cochelin. *Méthodes Asymptotiques-Numériques pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques*. Habilitation à diriger les recherches de l'Université de Metz, 1994.
- [16] H. A. Conklin. Design and tone in the mechanoacoustic piano : Part II. Piano structure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100 :695–707, 1996.
- [17] R. Courtnall. *La Fabrication des Guitares Classiques*. H. Vial, 2004.
- [18] M. Daumas. *Histoire générale des techniques*. PUF, 1979.
- [19] M. Ducornet. *Conversation privée*. 2007.
- [20] P. Dérogis and R. Caussé. Computation and modelisation of the sound radiation of an upright piano using modal formalism and integral equations. *Proc. of the 15th ICA, Trondheim*, 3 :409–412, 1995.
- [21] J. G. Easley. Large amplitude vibration of buckled beams and rectangular plates. *AIAA Journal*, 2(12) :2207–2209, 1964.
- [22] S. A. Emam and A. H. Nayfeh. On the nonlinear dynamics of a buckled beam subjected to a primary-resonance excitation. *Nonlinear Dynamics*, 35 :1–17, 2004.
- [23] K. Fenner. La table d'harmonie : construction neuve et réparation. *Europiano*, 1998.
- [24] D. G. Fertis. *Mechanical and structural vibrations*. John Wiley & Sons, 1995.
- [25] J. Frelat and C. Besnainou. Modal effective mass versus pre-stress on a piano sound board : modelling know-how of piano makers skill. *Proc. of ISMA*, 2001.
- [26] J. Frelat and A. Mamou-Mani. Modélisation mécanique et restauration de deux instruments du musée de la musique. *Journée d'étude, Conserver aujourd'hui : les vieillissements du bois. Cité de la Musique*, 2007.
- [27] E. Freyssinet. L'idée française de la précontrainte révolutionne l'art de construire. *Travaux*, 273 :355–368, 1957.
- [28] D. Friederich. Les tables des guitares et leurs barrages : les dilemmes du luthier. *Colloque Acoustique et Instruments Anciens, Cité de la Musique, SFA*, 1998.
- [29] V. Gibiat, J. Frelat, and C. Besnainou. Measuring mechanical non-linearities on stringed instruments. *Proc. of ISMA*, 2001.
- [30] B. Gille. *Histoire des techniques*. Encyclopédie de la Pléiade, 1978.
- [31] N. Giordano. Simple model of a piano soundboard. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102 :1159–1168, 1997.
- [32] N. Giordano. Mechanical impedance of a piano soundboard. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103 :2128–2133, 1998.
- [33] N. Giordano. Sound production by a vibrating piano soundboard. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104 :1648–1653, 1998.
-

- 
- [34] J.-J. Glassner. *Savoir et savoir-faire en mésopotamie. Dire le savoir-faire, ed. l'Herne*, 2006.
- [35] J. Guckenheimer and P. J. Holmes. *Non-linear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*. Springer-Verlag, 1986.
- [36] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des Vibrations. Application à la dynamique des Structures*. Masson, 1992.
- [37] M. Heidegger. *Essais et conférences*. Gallimard, 1980.
- [38] <http://www.le-violon.net>.
- [39] F. Hubbard. *Le Clavecin, Trois Siècles de Facture*. LAME, 1981.
- [40] E. Jobin. Les enseignements posthumes et très modernes d'un maître vraiment ancien. *Colloque Acoustique et Instruments Anciens, Cité de la Musique, SFA*, 1998.
- [41] E. Jobin. *Conversation privée*. 2007.
- [42] C. Johnson and R. Courtnall. *The Art of Violin Making*. R. Hale, 1999.
- [43] W. Kreider and A. H. Nayfeh. Experimental investigation of single-mode responses in a fixed-fixed buckled beam. *Nonlinear Dynamics*, 15 :155–177, 1998.
- [44] W. Lacarbonara. Direct treatment and discretizations of non-linear spatially continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 221(5) :849–866, 1999.
- [45] J. Lafitte. *Réflexions sur la science des machines*. Vrin, 1972.
- [46] C. Lambourg. Modèles temporels pour la simulation numérique de plaques vibrantes. *Thèse de doctorat de l'Université du Maine*, 1997.
- [47] E. Leipp. *Acoustique et Musique*. Masson, 1971.
- [48] A. W. Leissa and E. F. Ayoub. Vibration and buckling of a simply supported rectangular plate subjected to a pair of in-plane concentrated forces. *Journal of Sound and Vibration*, 127(1) :155–171, 1988.
- [49] A. Mamou-Mani, J. Frelat, and C. Besnainou. A modelization of the downbearing of the soundboards through a simplified system in nonlinear dynamics. *Proc. of ICSV12*, 2005.
- [50] A. Mamou-Mani, J. Frelat, and C. Besnainou. Vibrations non-linéaires d'une poutre flambée précontrainte. *Proc. of 8<sup>th</sup> CFA*, 2006.
- [51] A. Mamou-Mani, J. Frelat, and C. Besnainou. Effects of a static transverse load on nonlinear dynamical properties of a buckled beam : a reduced order 2 degrees of freedom model. *Proc. of 19<sup>th</sup> ICA*, 2007.
- [52] A. Mamou-Mani, J. Frelat, and C. Besnainou. Piano soundboard under prestress : A numerical approach. *Proc. of 19<sup>th</sup> ICA*, 2007.
- [53] A. Mamou-Mani, S. Lemoyne, J. Frelat, C. Besnainou, and F. Ollivier. Effects of prestresses on natural frequencies of a buckled wooden plate : A numerical and experimental investigation. *Proc. of ISMA*, 2007.
-

- 
- [54] J.-J. Marigo, H. Ghidouche, and Z. Sedkaoui. Des poutres flexibles aux ils inextensibles : une hierarchie de modèles asymptotiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série II b :79–84, 1998.
- [55] J.-J. Marigo and N. Meunier. Hierarchy of one-dimensional models in nonlinear elasticity. *Journal of Elasticity*, 83 :1–28, 2006.
- [56] V. Maurel. *Etude préliminaire au rayonnement d'une plaque précontrainte*. Mémoire de stage de DEA ATIAM, Université Paris 6, 1999.
- [57] J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee. Nearfield acoustic holography : I. theory of generalized holography and the development of nah. *J. Acoust. Soc. Am.*, 78(4) :1395–1413, 1985.
- [58] M. Mersenne. *Traité de l'harmonie universelle*. CNRS Editions, 1965.
- [59] E. Mettler. Dynamic buckling. in *Handbook of Engineering Mechanics*, ed. W. Flugge, 35 :105–122, 2004.
- [60] T. R. Moore and S. A. Zietlow. Interferometric studies of a piano soundboard. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(3) :1783–1793, 2006.
- [61] I. Nakamura. The vibrational characteristics of a piano soundboard. *Proc. of 11th ICA, Paris*, 4 :385, 1983.
- [62] A. H. Nayfeh, W. Kreider, and T. J. Anderson. Investigation of natural frequencies and mode shapes of buckled beams. *AIAA Journal*, 33(6) :1121–1126, 1995.
- [63] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [64] F. Ollivier, P. Alais, and A. Karkaletsis. Fast modal analysis by means of impulse acoustical holography. *Proc. of 11th ICSV*, 2004.
- [65] F. Ollivier and S. Le Moyne. Mise en oeuvre pour l'holographie acoustique de champ proche par l'exploitation de la mesure directe de la vitesse acoustique. caractérisation expérimentale des sondes pu micro flown. *Contrat PSA-UPMC*, 2007.
- [66] D. Parenthoine. *Dynamique non-linéaire d'un oscillateur couplé précontraint : contribution à une modélisation du comportement vibratoire de la table d'harmonie du piano*. Stage de Master d'Acoustique, Université du Maine, 2005.
- [67] P. Patrício, M. Adda-Bedia, and M. Ben Amar. An elastica problem : instabilities of an elastic arch. *Physica D*, 124 :285–295, 1998.
- [68] A. B. Pippard. The elastic arch and its modes of instability. *Eur. J. Phys.*, 11 :359–365, 1990.
- [69] H. Poincaré. *La science et l'hypothèse*. Flammarion, 1968.
- [70] F. Pérignon. *Vibrations de structures minces, élastiques, non-linéaires*. Thèse de doctorat de l'université de la Méditerranée-Aix Marseille II, 2004.
- [71] J. Qiu and J. H. Lang. A curved-beam bistable mechanism. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 13(2) :137–146, 2004.
-

- 
- [72] J. W. S. Rayleigh. *The Theory of Sound*. Dover, New-York, 1945.
- [73] A. A. Reblitz. *Le Piano*. L'Entretemps, 2005.
- [74] J. N. Reddy. *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford University Press, 2004.
- [75] B. E. Richardson and G. Roberts. The adjustments of mode frequencies in guitar : a study by means of holographic interferometry and finite element analysis. *Proc. Stockholm Music Acoustics Conference, Pub. Royal Swedish Academy of Music*, 46(2) :285–302, 1983.
- [76] R. M. Rosenberg. On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9 :155–242, 1966.
- [77] Pianos Sauter. <http://www.sauter-pianos.de>.
- [78] A. Schaeffner. *Origine des instruments de musique*. EHESS éditions, 1994.
- [79] S. W. Shaw and C. Pierre. Non-linear normal modes and invariant manifold. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1) :170–173, 1991.
- [80] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1) :170–173, 1991.
- [81] G. Simondon. *Du mode d'existence des objets techniques*. Aubier, 1958.
- [82] N. Q. Son. *Stabilité des structures élastiques*. Springer-Verlag, 1995.
- [83] C. A. De Souza. Techniques de maillage adaptatif pour le calcul des solutions de coques élastiques minces. *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6*, 2003.
- [84] B. Stiegler. *La technique et le temps*. Galilée, 1994.
- [85] H. Suzuki. Vibration and sound radiation of a piano soundboard. *J. Acoust. Soc. Am*, 80 :1573–1582, 1986.
- [86] O. Thomas. Analyse de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques. application aux instruments de percussion. *Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie*, 2001.
- [87] O. Thomas, C. Touze, and E. Luminais. Modèles réduits de structures minces en vibrations non-linéaires. *Proc. of colloque national en calcul de structures*, 2005.
- [88] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Nonlinear behaviour of gongs through the dynamics of simple rods system. *Proc. of ISMA*, 2001.
- [89] S. P. Timoshenko. *Théorie de la Stabilité Elastique*. Dunod, Paris, 1966.
- [90] C. Touzé. A normal form approach for non-linear normal modes. *Publications du LMA*, 256 :15–38, 2003.
- [91] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273 :77–101, 2004.
-

- [92] W.-Y. Tseng and J. Dugundji. Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 13 :467–476, 1971.
  - [93] A. F. Vakakis. Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical systems and signal processing*, 11(1) :3–22, 1997.
  - [94] M. Vangbo. An analytical analysis of a compressed bistable buckled beam. *Sensors and Actuators A*, 69 :212–216, 1998.
  - [95] W. A. Veronesi and J. D. Maynard. Nearfield acoustic holography : II. Holographic reconstruction algorithms and computer implementation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81(5) :1307–1322, 1987.
  - [96] M. Weber. *Sociologie de la musique*. Métailié, 1998.
  - [97] G. Weinreich. Coupled piano strings. *J. Acoust. Soc. Am.*, 62 :1474–1484, 1977.
  - [98] G. Weinreich. The coupled motion of piano strings. *in Five lectures on the acoustics of the piano, ed. by Anders Askenfelt*, 1990.
  - [99] K. Wogram. The string and the soundboard. *in Five lectures on the acoustics of the piano, ed. by Anders Askenfelt*, 1990.
  - [100] K. Wolters. *Le Piano*. Payot Lausanne, 1990.
-

## Résumé

Un *bon* instrument de musique est en premier lieu un instrument de musique *bien fait*. Le savoir-faire des fabricants contient ainsi de multiples techniques à l'origine de la qualité finale de l'instrument. L'objectif de ce manuscrit est d'apporter certains éléments de compréhension de ce savoir-faire grâce à la modélisation mécanique.

En accord avec le discours des fabricants de pianos modernes, l'étude s'est concentrée sur deux étapes de la fabrication du piano nommées « la charge » et « le bombé » des tables d'harmonie. Plusieurs modèles de structures *précontraintes* sont proposés pour évaluer les effets vibratoires de ces techniques de fabrication. Un premier calcul numérique sur une structure s'approchant d'une table de piano montre que « la charge » et « le bombé » ont des effets appréciables et complémentaires sur les propriétés vibratoires de la table d'harmonie. Des modèles réduits précontraints permettent ensuite de retrouver qualitativement ces effets sur des systèmes simples. Lorsque ces modèles réduits sont poussés dans leurs limites, ils montrent des caractéristiques vibratoires non-linéaires à faible amplitude d'excitation.

Ces résultats sont retrouvés expérimentalement sur un monocorde avec une table d'harmonie précontrainte. Le son de ce prototype d'instrument est très largement modifié par les précontraintes, ce qui apporte une image démonstrative des effets potentiels de « la charge » et du « bombé ».

Mots-clés : précontraintes, instruments de musique, piano, tables d'harmonie, calcul de structures non-linéaires, vibrations non-linéaires, modélisation des savoir-faire.

---